

- 257 -- E. Udeschini Brinis -- Sul divario fra due campi cinetici. *Rend. Ist. Lomb.* (1963)
- 258 -- E. Udeschini Brinis -- Sui sistemi meccanici dinamicamente equivalenti. *Rend. Ist. Lomb.* (1963)
- 259 -- F. Skof -- Sull'andamento delle somme parziali delle serie di potenze con integrale assolutamente convergente. *Boll. U.M.I.* (1963).
- 260 -- E. Bombieri -- Sull'analogo della formula di Selberg nei corpi di funzioni. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 261 -- M. Pastori -- Sulla curvatura della "direttissima" nel principio di Hertz. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 262 -- E. Udeschini Brinis -- Sul significato delle caratteristiche cinetiche e delle equazioni del Maggi per sistemi anonomi. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 263 -- F. Graiff -- Sull'uso di coordinate armoniche in relatività generale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 264 -- G. Ricci -- Sul teorema di Carathéodory-Bohr-Banach riguardante la copertura secondo Vitali. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 265 -- L. Cupello -- Sulle costanti delle condizioni di Hölder in forma integrale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 266 -- N. M. Ferlan -- Sul minimo modulo delle funzioni analitiche. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 267 -- F. Skof -- Sull'attenuazione delle condizioni tauberiane. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 268 -- E. Bombieri -- Sul problema di Bieberbach per le funzioni univalenti. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).
- 269 -- M. Dedò -- Sistemi di cerchi. *Period. di Matem.* (1963).
- 270 -- D. Roux -- Sulle orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni intere di ordine finito e tipo medio. II. - Ordine  $\rho$  diverso dal reciproco di un intero naturale. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).
- 271 -- D. Roux -- Sul divario fra l'ordine e l'ordine inferiore delle funzioni intere. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).
- 272 -- L. Cupello -- Sulla condizione di Hölder in forma integrale. *Riv. Matem. Univ. di Parma* (1963).
- 273 -- G. Ricci -- Il pensiero matematico, impronta latente nel mondo d'oggi. *Atti del VII Congresso Unione Matem. Ital., Genova* (1963).
- 274 -- G. Melzi -- Varietà topologiche plurifibrate e varietà differenziabili tre volte rigate. Note I. II. *Rend. Ist. Lomb.* (1964).
- 275 -- F. Skof -- Effetto dell'attenuazione delle condizioni tauberiane per le serie di potenze. *Ann. di Matem. pura ed appl.* (1964).
- 276 -- N. M. Ferlan -- Sull'andamento del minimo modulo delle funzioni analitiche. *Boll. U.M.I.* (1964).
- 277 -- V. Zambelli -- Il sottogruppo di Hughes e la serie centrale ascendente. *Boll. U.M.I.* (1964).
- 278 -- C. F. Manara -- Ufficio e significato dell'esperimento nell'insegnamento della geometria. *Period. di Matem.* (1964).
- 279 -- C. F. Manara -- Un teorema di Beppo Levi riguardante la logica formale. *Period. di Matem.* (1965).
- 280 -- C. Cercignani -- Sugli integrali impropri nel senso di Hadamard e su alcuni operatori ad essi collegati. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1965).
- 281 -- E. Bombieri -- On the large sieve. *Ed. Tamburini, Milano* (1965).
- 282 -- M. Dedò -- Questioni diofantee in problemi di geometria elementare. *Period. di Matem.* (1965).
- 283 -- M. Dedò -- Esami di abilitazione e concorsi a cattedre. *Period. di Matem.* (1965).
- 284 -- M. Marchi -- Il tema di matematica assegnato agli esami di abilitazione. (Cl. XIII). *Period. di Matem.* (1964).
- M. D'Aprile -- Il tema di matematica assegnato all'esame di abilitazione. *Period. di Matem.* (1965).
- P. G. Giudici -- La prova scritta del concorso per i Licei. *Period. di Matem.* (1965).
- 285 -- Albertoni - Lunelli - Maggioni -- Metodi iterativi variazionali per i problemi ellittici nella teoria dei reattori nucleari. *Atti Sem. Matem. e Fis. dell'Univ. di Modena* (1965).

# COLLECTANEA MATHEMATICA

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA

DELL'UNIVERSITÀ DI MILANO

N. 273

GIOVANNI RICCI

Il pensiero matematico,  
impronta latente nel mondo d'oggi

Estratto dagli "Atti del VII Congresso, dell'Unione Matematica Italiana, Genova 1963.,  
pp. 21-93

MILANO  
Anno 1964

MILANO  
Anno 1964



## IL PENSIERO MATEMATICO, IMPRONTA LATENTE NEL MONDO D'OGGI<sup>(1)</sup>

DI GIOVANNI RICCI (Milano)

Signore e Signori,

A ciascuno di noi è avvenuto certamente di constatare che nella maggior parte delle manifestazioni del mondo d'oggi, e non soltanto in quelle che si svolgono nell'ambito della Scienza e della Tecnica, si presentano caratteri, più o meno nascosti, a descrivere i quali il linguaggio matematico apparisce particolarmente adatto. Questo linguaggio trae sempre la sua origine da concetti che si sono formati durante l'evoluzione della Matematica, dall'antichità classica, su su, fino all'era moderna e a quella contemporanea.

Siamo così indotti alla persuasione che il pensiero matematico si trovi quasi ovunque, come un substrato — si potrebbe dire: come un'impronta latente — che affiora ogni qualvolta si ricerchino le ragioni intime e sostanziali dei fenomeni osservati, dei risultati di esperienze compiute, del successo di imprese scientifiche organizzate.

Il pensiero matematico, sotto il profilo qui adombrato, come compagno delle nostre riflessioni nei momenti di più limpida chiarezza, costituisce l'argomento del nostro discorso; argomento che non è la presentazione della Scienza matematica di oggi sebbene di necessità alcuni aspetti di questa siano ricordati.

L'ideale sarebbe che, partendo dai diversi concetti fondamentali della Matematica, antica e moderna, si riuscisse a seguire, per ciascuno di essi, il filo di penetrazione lungo lo sviluppo delle varie Scienze fino alle applicazioni nella tecnica e, più in generale, nella vita di oggi. E, anche, seguendo un andamento contrario, col partire dalle manifestazioni del mondo attuale, andare ricercando quei momenti in cui il pensiero matematico coagulò i concetti base che servirono per giungere a tali manifestazioni.

<sup>(1)</sup> La presente conferenza, che è stata letta come conferenza inaugurale del Congresso, ha carattere generale, ed è rivolta ad un pubblico più esteso di quello costituito dai soli cultori delle scienze matematiche.

Un programma di questo genere costituisce per me un impegno veramente grave, non soltanto per i limiti di tempo che sono imposti, ma ancor più a causa della vastità delle conoscenze che sarebbero necessarie.

Io cercherò di superare in parte queste difficoltà operando una scelta fra gli argomenti che affollano un tale programma: presenterò alcuni concetti fondamentali della Matematica, limitandomi a richiamare panoramicamente, per ciascuno di essi, le teorie che vi si connettono e ad aggiungere qualche osservazione di collegamento. Alcune figure che verranno proiettate consentiranno Loro di seguire con qualche agio il mio discorso. Chiedo fin d'ora la Loro benevola attenzione; ma forse non basta: chiedo Loro una attenzione partecipe.

\* \* \*

Incominceremo col ricordare, nei loro punti essenziali, tre atteggiamenti diversi dell'Analisi, tutti e tre classici e secolari nella loro origine, che costituiscono come tre pilastri sui quali è costituita gran parte dell'Analisi matematica moderna: intendiamo dire l'Analisi infinitesimale, l'Analisi dei fenomeni aleatori e l'Analisi armonica. Passeremo poi ad altri concetti in gran parte di carattere algebrico.

### Analisi infinitesimale.

Si lancia un grave nel vuoto; pensiamolo lanciato obliquamente verso l'alto: esso descrive una traiettoria (è ben noto che questa è una parabola) (vedi fig. 1).

Consideriamo due istanti  $t_0$  e  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , le due posizioni  $P_0$  e  $P_1$  del grave in detti istanti e l'incremento  $\Delta y$  della quota  $y = y(t)$  nel passaggio da  $t_0$  a  $t_1 = t_0 + \Delta t$ . ( $\Delta t$  è l'incremento del tempo  $t$  e  $y$  è funzione di  $t$ ). Che cosa si può dire dell'incremento di quota  $\Delta y$ , anziché considerare l'intervallo  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  di durata  $\Delta t$ , si considerano gli intervalli  $(t_0, t_0 + 2\Delta t)$ ,  $(t_0, t_0 + 3\Delta t)$ , ... di durata doppia, tripla, ... del precedente? Ebbene, l'incremento di quota è approssimativamente  $2\Delta y$ ,  $3\Delta y$ , ... (cioè esso approssimativamente si raddoppia, si triplica, ...); questo « approssimativamente » diventa tanto più stringente e preciso quanto più è breve la durata  $\Delta t$ : il coefficiente di proporzionalità or ora accennato al quale si approssima il rapporto  $\Delta y/\Delta t$  all'impicciolire di  $\Delta t$  è la « derivata » della quota  $y(t)$  rispetto al tempo  $t$  calcolata nel « punto »  $t_0$ : questa derivata è un ente legato all'« intorno infinitesimo » dell'istante  $t_0$  ed è un notevole

carattere « locale » nel punto  $t_0$ ; questa derivata varia, in generale, al variare dell'istante  $t_0$ . Una analisi più accurata, che in sostanza è un'analisi dell'« approssimativamente » suddetto, conduce alla derivata della derivata, cioè alla derivata seconda, alle derivate successive ecc. I fondatori dell'Analisi infinitesimale (NEWTON, LEIBNIZ,

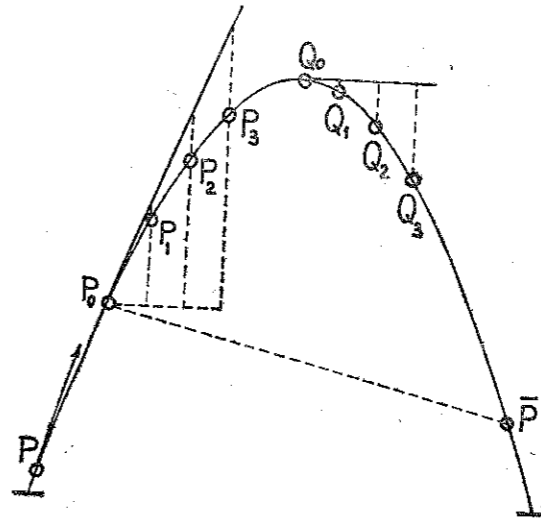


fig. 1

BERNOULLI, ...) insegnarono a trattare questi enti mediante un calcolo appropriato: il « calcolo infinitesimale ».

Adesso vorrei segnalare Loro due fatti. Il primo riguarda il punto  $Q_0$  di massima quota: diciamo  $t^*$  l'istante in cui esso viene raggiunto e consideriamo, come prima, gli incrementi del tempo  $\Delta t$ ,  $2\Delta t$ ,  $3\Delta t$ , ... a partire da  $t^*$  e i corrispondenti incrementi (in questo caso negativi) della quota: ebbene gli incrementi adesso si presentano in modo tale che il secondo è 4 volte il primo, il terzo è 9 volte il primo ecc.. Nel fenomeno in esame l'istante  $t^*$  (con la corrispondente posizione  $Q_0$ ) è il solo a presentare questo comportamento diverso da qualunque altro istante:  $t^*$  è l'istante nel quale la posizione del grave presenta la quota « stazionaria »; nel valore  $t^*$  (della variabile indipendente  $t$ ) la derivata della quota  $y$  è nulla ed è necessaria l'analisi locale più sottile per descrivere in quale modo approssimativamente si comporta la quota stessa al variare del tempo  $t$  nell'intorno dell'istante  $t^*$ .

La seconda osservazione riguarda l'analisi del fenomeno « nel finito » anziché nell'infinitesimo: domandiamoci se sia possibile de-



terminare la quota della posizione  $\bar{P}$  all'istante  $\bar{t}$  essendo l'intervallo  $(t_0, \bar{t})$  anche di durata  $\bar{t} - t_0$  non piccola e non atteggiata a impiccolire: la risposta è affermativa e questa determinazione richiede una analisi locale più microscopica nell'intorno dell'istante  $t_0$ .

In sostanza qui abbiamo fatto due osservazioni: 1°) la proporzionalità dei piccoli  $\Delta y$  ai piccoli  $\Delta t$  cade in difetto in un punto interessante: quello di quota stazionaria; 2°) l'analisi locale nell'intorno di  $t_0$  ci consente di determinare la quota in un istante lontano da  $t_0$ .

Accenniamo di sfuggita ad un altro esempio. Consideriamo un pendolo semplice nel vuoto (vedi fig. 2): se esso è abbandonato da una posizione, di cui diciamo  $\theta$  l'ampiezza, le successive oscillazioni hanno eguale durata; se esso viene abbandonato dalla posizione corrispondente all'ampiezza  $\theta + \Delta\theta$ , la durata dell'oscillazione differisce dalla precedente e la differenza diventa approssimativamente doppia, tripla, ecc. se si raddoppia, si triplica, ecc. l'incremento dell'ampiezza portandolo a  $2\Delta\theta$ ,  $3\Delta\theta$ , ecc. Se l'incremento  $\Delta\theta$  è assunto partendo da  $\theta = 0$ , cioè dalla posizione di riposo, questa proporzionalità si perde. La posizione di riposo corrisponde a una « configurazione stazionaria » del sistema:

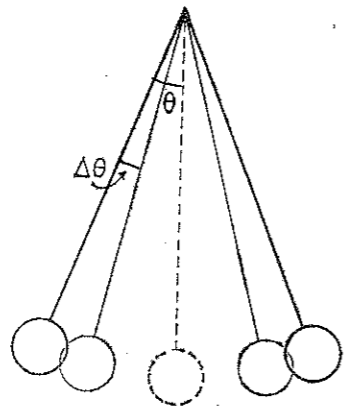


fig. 2

ad essa tenderà il sistema stesso quando sia dissipativo, per esempio quando si trovi in presenza della resistenza dell'aria o in presenza di attriti.

Come è ben noto, molti fenomeni naturali, opportunamente schematizzati, si studiano con l'Analisi infinitesimale che ci insegna a impostare e risolvere le equazioni differenziali che regolano i fenomeni stessi: si pensi per esempio alla Meccanica razionale e alla Fisica matematica classica. In questi casi si applicano principi la cui validità ci assicura che la configurazione del sistema in un dato istante  $t$  dipende esclusivamente da quella nell'istante iniziale  $t_0$  e da quella acquisita posteriormente nell'istante  $t_0 + \Delta t$  con  $\Delta t$  infinitesimo. Nella maggior parte dei casi l'interesse è rivolto alle configurazioni stazionarie alle quali, quasi sempre, il sistema in oggetto si avvicina alla lunga nel tempo quando siano verificate condizioni

che qui non è possibile precisare. La Meccanica celeste fornisce modelli importanti di questo tipo. E, ancora, procedimenti di prolungamento consentono di ricavare, quando la schematizzazione sia appropriata, le configurazioni lontane da quella iniziale per mezzo dell'esame di quelle nell'intorno infinitesimo di questa.

La legge che governa un fenomeno può talvolta assumere l'aspetto di equazione alle « differenze finite » o di sistemi di tali equazioni: cioè di un legame, o sistema di legami, fra i valori che quantità variabili assumono in una successione di valori staccati l'uno dall'altro  $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  della variabile indipendente  $t$  (successione « discreta » anziché un ordinato continuo): siamo condotti sul cosiddetto « calcolo delle differenze finite », classico e secolare, che, nelle posizioni di partenza, è di intuizione più immediata di quello degli infinitesimi. Il suo sviluppo prese vigore in parallelo col calcolo differenziale, oggetto dell'Analisi infinitesimale: ci si accorse delle profonde analogie che legano l'algoritmo differenziale con quello delle differenze finite e questo venne illuminato da quello. In tempi recenti, una rivalse del calcolo delle differenze si è presentata con i cosiddetti « metodi stroboscopici »: questi metodi si servono delle differenze finite per lo studio di sistemi governati da equazioni differenziali, fissando l'attenzione su una successione di valori staccati  $t_0, t_1, t_2, \dots$  della variabile indipendente  $t$  (per esempio il tempo) come se del sistema si assumesse una successione di fotogrammi opportunamente intervallati. In particolare negli ultimi decenni il calcolo delle differenze finite ha trovato applicazione nell'Economia matematica: ben si comprende che un sistema economico concreto può essere convenientemente sottoposto a rilevazioni lungo una successione di istanti intervallati regolarmente nel tempo, e le equazioni alle differenze si presentano in modo spontaneo. Ancora più recentemente il calcolo delle differenze finite ha trovato applicazione pratica veramente brillante nella risoluzione numerica delle equazioni differenziali (sia ordinarie che alle derivate parziali) con l'uso degli elaboratori elettronici veloci: si tratta di equazioni differenziali che traducono problemi posti dalla Fisica matematica, dalla Fisica teorica, dalla Scienza delle costruzioni e, in generale, dalla tecnica (per esempio deformazioni elastiche, vibrazioni, conduzione del calore, elettromagnetismo ecc.); queste equazioni sono accompagnate dalle cosiddette condizioni iniziali o dalle condizioni al contorno che garantiscono l'unicità della soluzione del problema trattato. La impostazione del metodo è semplice e di sapore classico; la sua esecuzione pratica richiede un numero enorme di operazioni



aritmetiche provenienti da una ripartizione minuta del campo sul quale si cerca la soluzione e spesso guidate lungo procedimenti detti « di iterazione » nell'intento di approssimare la soluzione. L'esecuzione di un calcolo di questo genere è praticamente possibile soltanto se affidata ad un elaboratore elettronico. Di fronte a questi elaboratori sono ritornati in onore concetti e procedimenti che nei tempi andati avevano soltanto un interesse teorico.

In certe categorie di fenomeni, la configurazione a un determinato istante non dipende soltanto dalla configurazione all'istante iniziale e dalla variazione infinitesima nell'intervallo infinitesimo di tempo ad esso successivo, ma anche da tutta una serie continua di configurazioni precedenti: questi fenomeni si dicono « ereditari » (per esempio l'elasticità presenta tale aspetto) e la formulazione analitica dei loro schemi conduce ad equazioni integrali (cioè ad equazioni nelle quali la funzione incognita risulta sotto un segno di integrale) o ad equazioni integrodifferenziali (cioè che possiedono i due caratteri congiunti). Anche nel calcolo delle differenze finite si presentano equazioni che si trovano in analogia con queste.

Il filone che abbiamo delineato si inserisce in un settore moderno della Matematica: quello dell'Analisi funzionale. Classi di funzioni concepite astrattamente come « punti » vengono organizzate in spazi (spazi a infinite dimensioni); la impostazione e la risoluzione dei problemi, cioè la determinazione di questi « punti », è accompagnata dal linguaggio geometrico. Si intravede che la difficoltà concettuale sia consistita nella organizzazione di questi spazi quando ci si è proposto di introdurre una « topologia », cioè la nozione di intorno di un « punto », oppure una « metrica » con la nozione di distanza di due « punti » (cioè di due funzioni).

A questo ordine di idee si è giunti dopo un lungo periodo di evoluzione nel quale si è inserito, come determinante, il terzo degli atteggiamenti che abbiamo annunciati e che verrà da noi illustrato più tardi.

#### Analisi dei fenomeni aleatori.

Il lancio della moneta, col risultato « testa » o « croce », il lancio del dado, l'estrazione di una pallina da un'urna contenente palline che differiscono eventualmente solo per il colore, costituiscono esperienze il cui risultato è dovuto al « caso ». Lo studio di fenomeni

che possono schematizzarsi secondo esperienze di questo tipo, ha condotto, come è ben noto, al Calcolo delle probabilità.

Fissiamo l'attenzione su un'urna di assegnata composizione: per esempio, contenente 8 palline bianche e 2 nere: 10 in tutto. Si eseguisca una prima estrazione: la pallina estratta è bianca oppure nera: questa esperienza isolata non dà alcuna informazione sostanziale sulla suddetta composizione; ma adesso fissiamo l'attenzione sulle quattro esperienze consecutive che veniamo ad esporre e che concettualmente illuminano proprietà importanti dei fenomeni aleatori.

1°) Eseguiamo una sequenza di 100 estrazioni consecutive, col riporre ogni volta la pallina entro l'urna: l'esperienza insegna che « circa » 80 volte l'estrazione ha condotto a una pallina bianca ( $80/100 = 8/10$ , otto palline bianche su dieci).

2°) Procediamo a una seconda, più complicata esperienza: eseguiamo una sequenza di 1000 sequenze di 100 estrazioni ciascuna (è come una insistente domanda, rivolta ad analizzare quel « circa »). Registriamo il numero delle volte che in ogni sequenza di 100 estrazioni è uscita una pallina bianca: otterremo una sequenza di 1000 numeri, ciascuno dei quali si scarta più o meno da 80; come sono distribuiti intorno all'80? Per rendercene conto (vedi fig. 3) riportiamo in ascissa  $x$

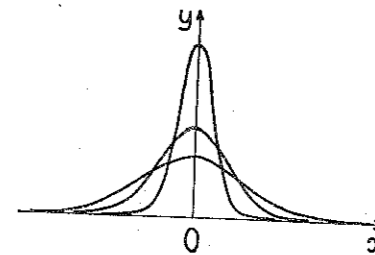


fig. 3

gli scarti da 80, positivi e negativi, e in ordinata  $y$  il numero delle volte, valutato in « per mille », che ciascuno di questi scarti si è presentato (saranno numerosi vicini allo zero e pochi lontano dallo zero). La sequenza di punti  $(x, y)$  così ottenuta si distribuisce in modo che un profilo continuo lungo tali punti assume la forma di una curva a campana (la cosiddetta « curva di GAUSS » che rispecchia la « legge esponenziale degli errori »).

3°) Adesso ripetiamo tante volte questa esperienza di 1000 sequenze di 100 estrazioni ciascuna e ogni volta costruiamo il profilo a campana: ebbene si constata che quel profilo rimane sostanzialmente immutato.

4°) Insistiamo ancora nella domanda con un'ultima esperienza più complicata: immaginiamo di eseguire, prima 1000 sequenze di 100 estrazioni ciascuna e poi di continuare fino a 2000 sequenze di 100 estrazioni ciascuna, e poi di continuare ancora fino a 5000



sequenze, fino a 10000 sequenze ecc.: otteniamo tanti profili a campana, costruiti in modo analogo, per 1000, 2000, 5000, 10000 ecc. sequenze. Che cosa possiamo osservare sull'insieme di questi profili? All'aumentare del numero delle sequenze effettuate, la curva a campana, pur mantenendo fissa l'area globale limitata fra essa e l'asse delle  $x$ , si innalza nella zona centrale (vedi fig. 3) e, restringendosi, tende ad aderire all'asse delle  $y$ , abbassandosi nella zona lontana dall'origine; in questa evoluzione verso l'aspetto aghiforme della curva a campana, quando il numero delle sequenze di prove aumenta, è contenuta la sostanza dell'esperienza su uno schema di questo genere, cioè su uno « schema aleatorio ». Come è stato già detto in forma paradossale, l'evoluzione suddetta verso la configurazione aghiforme di quella curva rappresenta la « certezza del caso ».

« Al LAPLACE, come dice il CASTELNUOVO, spetta il merito di avere scoperto la vera sorgente delle singolari regolarità che il caso presenta: sotto ipotesi semplificatrici, ma però molto larghe, il « caso », cioè l'effetto risultante di un gran numero di piccole cause indipendenti, ubbidisce approssimativamente alla legge esponenziale degli errori ». Si intravede come, attraverso una concezione di questo genere, i fenomeni aleatori possano essere, non soltanto sottoposti a calcolo, ma anche inseriti nell'Analisi infinitesimale: da questo punto di vista, gli scarti piccoli, che su quel diagramma a campana sottile si trovano computati nella zona aghiforme intorno all'asse delle  $y$ , si riferiscono a un aspetto tipico, molto probabile; anzi, estremamente probabile se quella zona è molto alta e sottile.

Già durante l'800 la teoria cinetica dei gas e la critica della termodinamica avevano richiamato l'attenzione sul fatto che, nello studio dei fenomeni della macrofisica, gli eventi, concepiti come certi nel senso classico, dovevano concepirsi invece, sotto il nuovo punto di vista, come tipici, cioè come appartenenti alla classe di quelli estremamente probabili: in accordo con questa veduta, il Calcolo delle probabilità che sottopone a studio qualitativo e quantitativo i fenomeni aleatori, pone in rilievo quelle configurazioni che sono tipiche per il sistema. A chiarimento aggiungiamo che si presentano in natura fenomeni non reversibili nei quali, in generale, la configurazione variabile tende a una configurazione tipica. (Uno schema elementare: si mischia la sabbia omogenea contenuta in un recipiente che inizialmente si trovava distribuita in due strati diversi e di diverso colore; alla fine dell'operazione, in ogni parte del recipiente, il rapporto delle quantità dei due tipi di sabbia è all'incirca lo stesso: si tratta di un fenomeno evidentemente irreversibile per

l'impossibilità di governarlo nel movimento a ritroso!) Per questa categoria di fenomeni il Calcolo delle probabilità è essenziale, in aggiunta all'Analisi classica.

Ritorniamo all'evoluzione verso l'aspetto aghiforme della curva a campana: la teoria degli errori di osservazione, costruita da GAUSS e rivolta a definire la misura di una grandezza fisica mediante procedimento operativo e strumentale si vale di quella evoluzione per ricavare, dalla linea mediana di quella figura, la misura della grandezza in esame; questo ordine di idee che investe il problema della misura, distaccandosi dalla posizione astratta di EUCLIDE dopo due millenni, ci fa sentire quanto ampia sia la portata dei concetti che alla buona andiamo esponendo.

Il problema della sistemazione logica di questa parte dell'Analisi si è evoluto col tempo, fino ad impegnare l'Analisi moderna: in particolare la Teoria degli insiemi. La Teoria delle funzioni di variabile reale definite puntualmente, cioè « punto per punto » (o, come si dice, nel senso di DIRICHLET), richiamò l'attenzione sugli insiemi di punti (nel piano, nello spazio, nei vari spazi), sulla loro misura e sulla nozione di integrale; sorse così la misura degli insiemi secondo PEANO-JORDAN, secondo BOREL e secondo LEBESGUE e con questi concetti si veniva a creare lo strumento per il problema suddetto: in particolare, la classe degli insiemi misurabili secondo BOREL (costituente un cosiddetto  $\sigma$ -anello e pertanto) regolata da un'algebra in accordo con quella suggerita dai principi fondamentali delle « probabilità a priori », risultò lo strumento adattissimo. Ebbene, la Teoria delle probabilità a priori si vale di quella piattaforma teorica e riceve un assetto come parte dell'Analisi matematica. La estrema probabilità (cioè la quasi certezza) è rivelata da insiemi eccezionali di misura nulla oppure di misura infinitesima di fronte a un procedimento di limite.

La Statistica, che si è tanto sviluppata in questi ultimi decenni, ha una sua metodologia che si giustifica matematicamente traguadando la Teoria delle probabilità. Nel mondo d'oggi, caratterizzato dalle comunicazioni intense e istantanee, dall'automatismo operativo, dalle possibilità ampie di selezione e di calcolo mediante gli elaboratori elettronici, la Statistica può affrontare la descrizione di sistemi estremamente complessi e centrare cause ed effetti o, meglio, interazioni all'interno dei sistemi stessi.

Terminiamo questi cenni sull'Analisi dei fenomeni aleatori con un'ultima osservazione: l'uso sempre più esteso degli elaboratori elettronici e il continuo ampliarsi delle loro possibilità hanno con-



dotto ad alcuni metodi di calcolo numerico fondati proprio sostanzialmente sull'Analisi aleatoria: alludo ai cosiddetti metodi Monte-Carlo e analoghi, la cui esecuzione richiede l'uso di «sequenze casuali» di numeri (da ciò il richiamo alla sede tipica dei giuochi d'azzardo). Questi metodi consentono di calcolare numericamente espressioni attinenti all'Analisi infinitesimale classica (per esempio integrali, soluzioni di equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali ecc.) cioè espressioni tipicamente deterministiche e per le quali erano noti procedimenti classici deterministici di approssimazione. La via seguita è a prima vista paradossale: la sua naturalezza è invece frutto delle possibilità dell'elaboratore elettronico che può eseguire velocemente un gran numero di esperienze fondate sui numeri a caso. Si rifletta alle esperienze concettuali sull'urna segnalate inizialmente e praticamente inattuabili: ebbene, esperienze di tale tipo opportunamente schematizzate sono divenute attuabili grazie agli elaboratori. Questo è uno dei fenomeni in cui lo strumento matematico aiuta l'intuizione col disancorarla da posizioni di inerzia e con l'indirizzarla verso nuove inattese vedute.

#### Analisi armonica.

Consideriamo le quattro sinusoidi della figura 4 contrassegnate con 1, 2, 3, 4 di periodo rispettivamente  $2\pi$ ,  $2\pi/2$ ,  $2\pi/3$ ,  $2\pi/4$  (di frequenza 1, 2, 3, 4); la loro somma è la funzione il cui diagramma è la linea tracciata con segno più grosso: questa funzione è la somma di quattro sinusoidi. Inversamente: assegnata la funzione somma si può risalire alle quattro sinusoidi componenti? e in quale modo? Questo problema, qui posto in un caso elementare e semplice, è fondamentale: si tratta di compiere l'analisi armonica di quella funzione. Un problema di questo tipo è, come del resto quello esaminato nell'Analisi infinitesimale, un problema di «rap-presentazione» (come somma); tuttavia esso non si risolve con una analisi locale nell'infinitesimo (che condusse allo sviluppo in serie di TAYLOR o serie di potenze), ma effettuando medie dei valori della funzione su tutto l'intervallo, mediante funzioni peso che, nel caso semplice in esame, sono  $\sin t$ ,  $\sin 2t$ ,  $\sin 3t$ ,  $\sin 4t$ .

Qualche parola di orientamento sopra a queste medie: tutti sanno che cos'è la media aritmetica di una sequenza di numeri (per es. la media dei voti di uno scolaro); e ancora è noto che cosa sia una media ponderata (per es. la media dei voti di uno scolaro,

quando ad essi si dà peso maggiore o minore secondo l'importanza delle materie); e ancora una complicazione: media ponderata con pesi positivi e negativi (i numeri che intervengono con peso negativo è come se fossero cambiati di segno e presi con peso positivo). E,

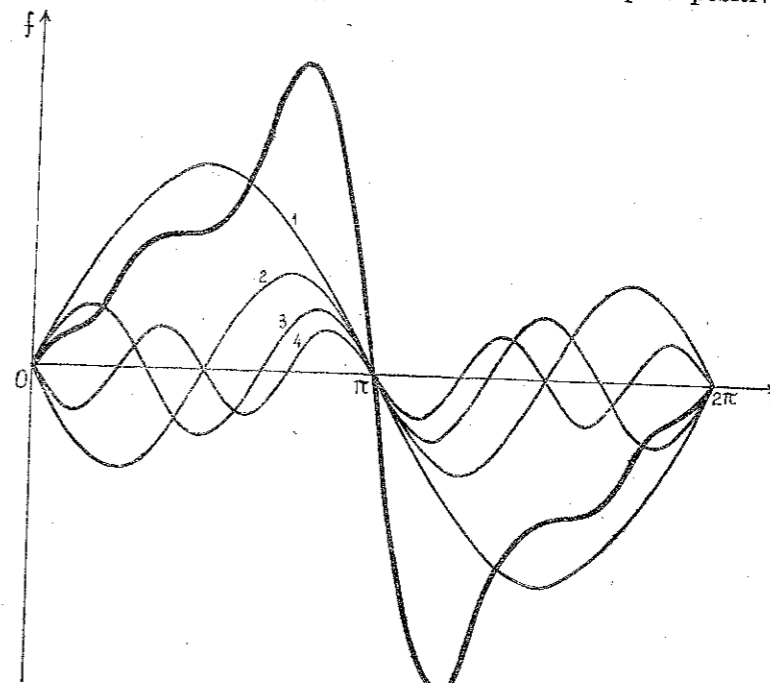


fig. 4

infine, un'ultima complicazione: i valori di cui si fa la media, anziché costituire un aggregato di un numero finito di numeri, sono infiniti e dipendenti dalla variabile continua  $t$  (per esempio il tempo) in un certo intervallo che assumiamo  $0 \leq t \leq 2\pi$ ; inoltre il peso (positivo o negativo) è una funzione dipendente anch'essa dalla variabile  $t$ . Nelle condizioni qui in ultimo accennate, la media si presenta spontaneamente come un integrale definito. Quando la funzione  $f(t)$  è periodica di periodo  $2\pi$  e la funzione peso è  $\sin nt$  detta media ha la forma

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

si ottiene una successione di medie  $b_1, b_2, b_3$  ecc. assumendo  $n = 1, 2, 3$  ecc.



Nel caso semplice elementare della fig. 4 le medie che ci interessano sono quelle corrispondenti a  $n = 1, 2, 3, 4$ .

Guardando la figura e riflettendo sull'andamento, per esempio, del peso  $\sin 4t$  che compie sull'intervallo  $0 \leq t \leq 2\pi$  quattro oscillazioni complete (4 arcate di sopra alternate con 4 di sotto), ci si rende conto di come agisca questo peso mentre si valuta la media, ad esso attinente, della funzione  $f(t)$  di partenza il cui diagramma è segnato con tratto più grosso. Domandiamoci perchè negli sviluppi in somme del tipo che qui presentiamo risultano adatte e utili le funzioni peso delle forme  $\sin nt, \cos nt$ ? La risposta sta in questa proprietà singolare: la media ponderata, con peso  $\sin nt$ , della funzione  $\sin mt$ , quando  $m \neq n$ , è nulla; lo stesso si dica per  $\cos nt$  come peso di  $\cos mt$  ( $m \neq n$ ) e per  $\sin nt$  come peso di  $\cos mt$  ( $m \neq n$ ). In questa proprietà, detta di « ortogonalità » fra le funzioni circolari qui presentate, sta la ragione del successo; in particolare la funzione  $f(t)$  elementare prescelta, proprio per il modo come è stata costruita, presenta  $b_5 = 0, b_6 = 0, b_7 = 0, \dots$  e vale la partizione in 4 addendi

$$f(t) = b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + b_3 \sin 3t + b_4 \sin 4t$$

dove  $b_1, b_2, b_3, b_4$  sono le quattro medie di cui abbiamo dato sopra la rappresentazione integrale.

Questa rappresentazione della funzione come somma di un numero finito di addendi o termini ne costituisce l'analisi armonica; tale analisi conduce in generale a una serie di infiniti termini, che costituisce il cosiddetto sviluppo in serie di FOURIER della funzione stessa. Questo tipo di sviluppo e altri analoghi, nacquero nell'intento di dare risposta a problemi di Fisica-matematica (come per esempio vibrazioni, conduzione del calore ecc.).

Per illustrare questo sviluppo in serie presentiamo molto brevemente un esempio.

Consideriamo la funzione  $f(t)$ , il cui diagramma è costituito dai due tratti rettilinei obliqui segnati nella figura 5. Essa presenta una « discontinuità » nel punto  $t = \pi$ , nel quale essa « salta » da un valore positivo a un valore negativo; concepitone il prolungamento per periodicità, il suo diagramma si presenta come nella figura riportata nella parte inferiore. L'analisi armonica conduce a una serie di FOURIER (costituita di infiniti termini).

$$f(t) = b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \dots + b_n \sin nt + \dots$$

e le somme parziali  $b_1 \sin t, b_1 \sin t + b_2 \sin 2t, \dots$ , hanno diagrammi dei quali nella figura sono segnati quelli corrispondenti alle somme di 4, 6, 10 termini. I diagrammi rispettivi di queste somme vanno avviluppando sempre più strettamente il diagramma rettilineo della funzione  $f(t)$ ; ma, in prossimità del punto  $t = \pi$ , nel quale si presenta la discontinuità, cioè un « salto », questi diagrammi presentano un saliente verso l'alto ed uno verso il basso, rispettivamente a sinistra e a destra di questo punto; questo saliente non si riduce

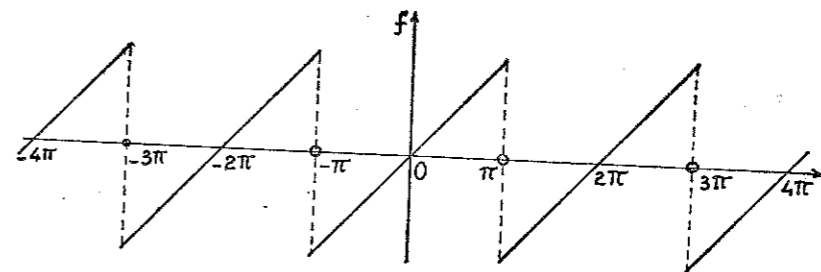
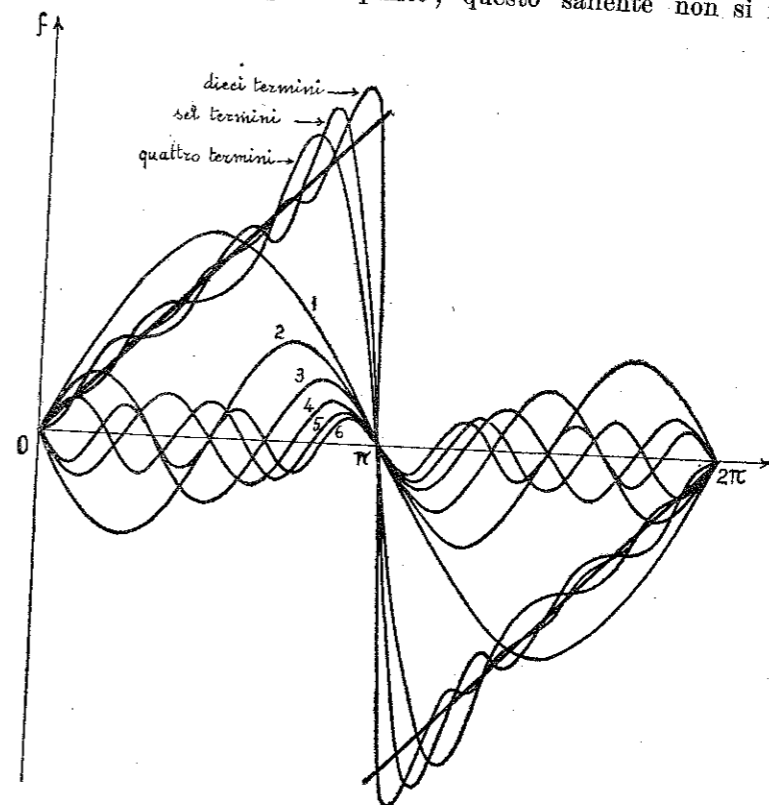


fig. 5

col progredire dell'indice della somma e si stabilizza intorno a una certa percentuale dell'ampiezza del salto: è un fenomeno singolare nel quale sembra che il diagramma della somma parziale, nell'intento di avvicinarsi il più possibile e il più a lungo possibile al tratto rettilineo, ritenga che, per poter compiere il salto, sia conveniente prendere lo slancio coll'allontanarsi dagli estremi del segmento da saltare. Il fenomeno qui alla buona illustrato e posto in evidenza dalle linee della figura 5 è il cosiddetto « fenomeno di GIBBS ».

Mi sia consentita qui una breve divagazione. La sinusoide contrassegnata con 1 (vedi fig. 4) (detta armonica fondamentale) sia il diagramma acustico della nota *do*; allora, le sinusoidi 2, 3, 4 rappresentano rispettivamente il *do* all'ottava sopra, il successivo *sol* e il *do* ancora successivo. Immaginiamo il suono emesso dalla vibrazione, conforme alla linea somma delle quattro precedenti e tracciata con segno rinforzato; dal nostro orecchio esso viene sottoposto all'analisi armonica che coglie le quattro note costituenti un gradito accordo.

Sono ben noti i principi che giustificano, con la presenza di rapporti semplici fra le diverse frequenze delle vibrazioni, l'ascolto gradito e riposante di linee melodiche e di accordi. Non è qui il caso di parlare della musica come arte: ci basta rilevare che certe descrizioni e giustificazioni fisiologiche sono connesse a fatti puramente matematici. Fondamentale è, per esempio, il fatto aritmetico

che la radice dodicesima di 2 (cioè  $\sqrt[12]{2}$ ) e le sue successive potenze, sebbene siano numeri irrazionali, trovino una veramente buona approssimazione mediante frazioni semplici (cioè con termini piccoli): diciamo fondamentale perchè questo fatto ha influito su certi aspetti della musica in occidente dal momento in cui venne accolta, per ragioni pratiche, la scala temperata.

Sarebbe una evidente ingenuità collocare sulla falsariga matematica i giudizi di valore riguardanti la musica come arte; tuttavia desidero qui osservare che la drastica evasione della musica moderna dagli schemi tradizionali ha condotto ad opere che si valgono ancora più di principi e schemi di tipo matematico. Infatti, mentre in passato l'apprezzamento veniva inconsciamente filtrato attraverso la fisiologia delle sensazioni, attualmente tale apprezzamento finisce col soggiacere a schemi puramente intellettualistici, tanto che la partecipazione dell'ascoltatore risulta veramente singolare.

Leggiamo che cosa scriveva qualche settimana fa l'insigne critico e fine umanista EUGENIO MONTALE: « I casi della musica sono molteplici, ma per chi si reca ad ascoltare esecuzioni di musica si riducono ad una osservazione di carattere generale. Da una tren-

tina d'anni è stata abbandonata, non da tutti ma da molti compositori, la tonalità tradizionale per dar luogo a un sistema in cui tutte le dodici note debbono essere presenti nella frase musicale senza che alcuna vi ricorra, assumendo così valore di dominante. La frase (la serie, non sempre di dodici note) è poi assoggettata a diverse manipolazioni, rovesci, retrogradi e « cancri » in modo da assicurare la continuità non di una melodia, che non può esserci, bensì una certa razionalizzazione del procedimento. Rovesci, retrogradi e letture « a specchio » possono anche essere estesi ad altri elementi strutturali. Il risultato è interessante alla lettura, del tutto inefficace all'ascoltazione. Una musica da leggersi mentalmente è forse il capolavoro dell'ermetismo . . . . .

Tesi principale di FEDELE D'AMICO è che il nuovo linguaggio non sia una ricostruzione ma una disgregazione che interessa solo nei casi in cui l'ascoltatore ricerchi per conto suo qualche nesso tonale, stabilendo rapporti tra alcune note della serie... In casi simili l'ascoltatore è anche parziale autore della musica che egli riesce a ricomporre in sé... »

Ritorniamo allo sviluppo in serie di FOURIER, al fenomeno di GIBBS e alla successione di diagrammi pensata come immagine di suoni.

Ascoltiamo un usignolo nella notte: quali delicatezze di impressioni; il loro perchè resterà sempre un mistero. Ma l'uomo, nella sua smania di conoscenza, sottoporrà all'analisi armonica quel canto, riprodotto sul nastro magnetico, magari al rallentatore. Ivi prenderanno più preciso rilievo quelle successioni modulate, acute, frenetiche di vibranti interruzioni. Non mi meraviglierei, esaminando tale analisi, si venisse a concludere che certi requisiti soggiacenti a

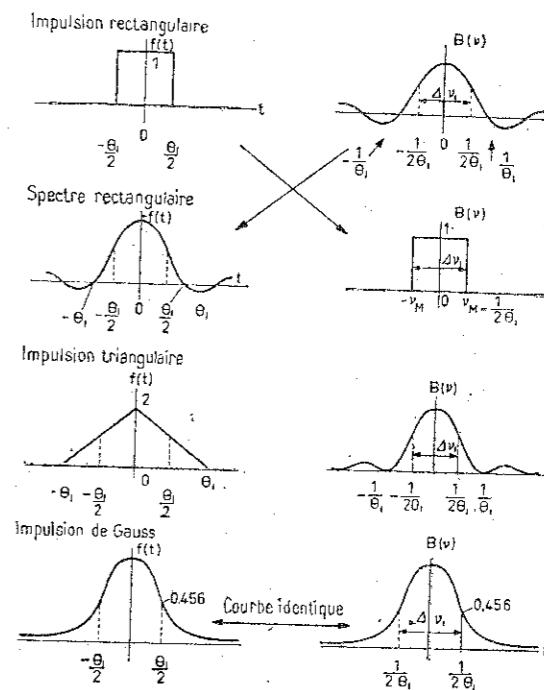


fig. 6



quell'incanto, siano probabilmente dovuti a una dosata distribuzione di fenomeni di GIBBS.

*Integrale di FOURIER.* Si consideri adesso un segnale emesso una volta tanto, non periodico: come si può eseguire la sua analisi? Quale rappresentazione assumere come atta a porre in rilievo i risultati dell'analisi stessa? A questo scopo è utile il cosiddetto «integrale di FOURIER». Qui presentiamo una figura (vedi fig. 6) (\*).

Consideriamo la funzione  $f(t)$  costante ed uguale a 1 nell'intervallo fra  $-\theta_1/2$  e  $\theta_1/2$  (un breve segnale di intensità costante, preceduto e seguito da silenzio indefinito; vedi la figura a sinistra nella prima riga). Calcoliamo la media integrale di quel segnale, da  $-\infty$  a  $+\infty$  (diciamola  $B(\nu)$ ) con la funzione peso  $\cos 2\pi\nu t$  ( $\nu$  frequenza): tale media risulta una funzione di  $\nu$ , cioè:

$$B(\nu) = B(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t dt.$$

e si dice «spettro delle frequenze» di quella funzione  $f(t)$ . Indaghiamo intuitivamente l'andamento di tale spettro. Essendo il segnale simmetrico rispetto all'asse delle ordinate l'analoga media  $A(\nu)$  rispetto alla funzione peso  $\sin 2\pi\nu t$  risulta nulla.

È evidente che per  $\nu = 0$  si ha  $B(0) = \theta_1$ . Un contributo nella media  $B(\nu)$  è portato solo dai valori di  $t$  compresi nell'intervallo  $(-\theta_1/2, +\theta_1/2)$ . È intuitivo che, quando  $\nu$  è molto elevato, in questo intervallo il peso  $\cos 2\pi\nu t$  possiede molte oscillazioni da  $+1$  a  $-1$ , e, considerato come peso, porta evidentemente a numerose compensazioni fra contributi positivi e contributi negativi del segnale così ponderato, tanto che i contributi non sottoposti a tali compensazioni e che non si elidono sono quelli che riguardano le zone estreme del segnale, le quali si fanno via via più ristrette all'aumentare di  $\nu$  fino a svanire al crescere di  $\nu$ ; questo ci persuade che l'andamento di  $B(\nu)$ , simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (vedi la figura a destra della prima riga), parte dal valore  $\theta_1$  per  $\nu = 0$  e tende a zero al crescere indefinitamente di  $\nu$ . Un ulteriore sforzo di intuizione ci persuade che lo spettro  $B(\nu)$  assume, per determinati valori di  $\nu$ , anche il segno negativo (ciò dipende dal modo come il peso  $\cos 2\pi\nu t$  «abborda» l'estremo del diagramma di  $f(t)$ ). In sostanza il valore  $B(\nu)$  è il contributo della frequenza  $\nu$

(\*) Da L. BRILLOUIN, *Science and Information Theory*, 2. ed., New York 1962, p. 86.

all'analisi di quel diagramma. La serie di coppie di diagrammi presentate nella fig. 6 vuole mostrare: 1°) che sussiste una reciprocità fra il diagramma «rettangolare» e il suo spettro (1° e 2° riga); 2°) che l'impulso triangolare può avere uno spettro non negativo (3° riga); 3°) che la curva a campana di GAUSS possiede come spettro un'altra campana di GAUSS (figure della 4° riga).

L'integrale di FOURIER fa passare dalla funzione  $f(t)$  al suo spettro  $B(\nu)$ : è una «trasformazione integrale» che fa passare da funzione a funzione: questa trasformazione, insieme ad altre analoghe di FOURIER e ad altre di carattere più generale (ottenute con svariati tipi di funzioni peso o «nuclei» della trasformazione), è uno strumento utile in molti problemi della Fisica matematica e della Tecnica. Ricordiamo qui, fra le applicazioni, quelle relative alla Teoria della informazione che è nata appena quindici anni fa con lo schema matematico proposto da C. E. SHANNON: questo autore pose con precisione i concetti di: produzione e trasmissione di informazione, quantità e contenuto di informazione, tasso di accrescimento di una quantità di informazione, ecc. e tutto questo in maniera quantitativa, deducendo logicamente un complesso di risultati in accordo con l'esperienza, che provarono quanto fossero ben poste le definizioni da lui introdotte e i metodi da lui seguiti. È naturale che, soltanto dopo avere condotto i concetti qualitativi, incerti e nebulosi, ad una forma quantitativa precisabile, è consentito di operare analiticamente su di essi affidandoli, tramite la teoria delle probabilità, a interessanti modelli matematici. La Teoria della informazione si è sviluppata in modo estremamente rapido: essa ha dimostrato con ciò quanto sia diffusa e operante la ricerca scientifica, guidata dal pensiero matematico. Pubblicazioni recenti, in particolare una opera di LEON BRILLOUIN, dimostrano che essa ha già trovato applicazioni e inquadramento chiaro e illuminante sia nella Scienza pura che nella Tecnica. Si valgono di questa teoria la Termodinamica, i moti browniani, i rumori termici dei circuiti elettrici, il principio di indeterminazione della Fisica, le telecomunicazioni, l'analisi delle lingue scritte, il problema della codificazione, le macchine calcolatrici elettroniche, il problema della stabilità dei circuiti di queste calcolatrici ecc.

Fermiamoci un momento per insistere sulla novità della posizione nella quale si trovano, dal punto di vista concettuale, le rappresentazioni mediante serie di FOURIER o mediante integrali di FOURIER o integrali più generali, di fronte a quelle classiche dell'Analisi infinitesimale che abbiamo adombrato nel primo aspetto e che condu-

cono, come vedemmo, al cosiddetto sviluppo in serie di TAYLOR. Infatti la serie di TAYLOR esige un'analisi locale sempre più microscopica della funzione, definita puntualmente; detta serie richiede una adatta regolarità alla funzione da rappresentare e non tollera alcuna discontinuità almeno nell'intorno in cui vale lo sviluppo. Di contro, la serie di FOURIER (o l'integrale di FOURIER) prende in esame la funzione assegnata arbitrariamente (il suo diagramma potrebbe essere lo schema di un segnale periodico di intensità comune variabile o una linea tracciata dalla punta scrivente di uno strumento di misura qualsiasi); essa tollera le discontinuità ed è costruita attraverso un'analisi di media integrale e pertanto si serve di informazioni che provengono da tutto l'intervallo. Le medie integrali non si alterano quando la funzione venga alterata anche in infiniti punti costituenti un insieme di misura nulla: la definizione punto per punto può essere abbandonata purchè si salvi la rappresentazione (cioè lo spettro delle medie ponderate) che impegna l'andamento globale della funzione. Potremmo dire che l'apprezzamento di questa seconda concezione è più consono al senso comune, pronto a cogliere dei fenomeni l'aspetto macroscopico: alludo al senso comune, anche sprovveduto. Quale e quanto intenso lavoro è stato necessario, nell'evolversi del pensiero matematico, per provvedere quel senso comune dei mezzi utili e adatti a precisare quantitativamente il risultato di tale apprezzamento! Infatti, le nozioni di serie di funzioni, di integrale definito, di misura degli insiemi, nel campo reale e nel campo complesso, hanno dovuto maturare e perfezionarsi fino alla forma di LEBESGUE per portare alle rappresentazioni mediante serie o integrali che consentono di organizzare le classi di funzioni come spazi nella forma utile per i problemi posti, per esempio, dalla Fisica teorica. Come si vede, si tratta di due concezioni in posizioni antitetiche: la presenza sostanziale di queste due concezioni ha indirizzato l'Analisi matematica durante gli ultimi 150 anni sull'itinerario del concetto di funzione.

La seconda concezione, come abbiamo già detto, ha permesso di organizzare classi di funzioni come spazi metrici concreti della moderna Analisi funzionale, analisi che si tende a presentare ora in forma sempre più astratta.

Riflettiamo un istante sulla capacità sublime dell'orecchio: in questo organo si realizza spontaneamente un tipo di analisi a cui il pensiero matematico è giunto soltanto in epoca moderna.

Ancora una riflessione: l'Analisi infinitesimale, l'Analisi dei fenomeni aleatori, l'Analisi armonica costituiscono tre punti di vista

diversi, complementari e collaboranti nella Scienza matematica. Per questa ragione li abbiamo presentati in questa prima parte del nostro discorso.

### I gruppi, la covarianza, le leggi della natura.

Un altro aspetto del pensiero matematico, molto diverso dai tre segnalati precedentemente, si è fatto luce faticosamente negli ultimi tre secoli: la sua essenza è prettamente algebrica, le sue immagini più cordialmente intuitive sono fornite dalla Geometria e dalla Meccanica, la sua presenza si rivela in quello che potrebbe dirsi il «tessuto» delle trasformazioni analitiche formali e delle famiglie di tali trasformazioni come per segnalarci che non è possibile separare la forma dalla sostanza nei modelli che la Matematica costruisce; un secolo e mezzo fa esso trasse chiara consistenza dai rudimenti dell'Analisi combinatoria per lo studio delle equazioni algebriche e, con la successiva evoluzione, si è manifestato presente anche se nascosto, in tutti i settori delle Scienze matematiche; attualmente sembra che esso guidi con chiarezza verso la formulazione delle leggi della natura.

Noi cominceremo col citare una pagina fondamentale nella storia della Scienza che Pocchione moderno vede illuminata da quell'aspetto.

Nel «Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo» GALILEO (1632) dice <sup>(3)</sup>

«Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia «sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, «farfalle e simili animalletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; suspendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma «la nave, osservate diligentemente come quelli animalletti volanti «con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci «si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le «stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando «all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare «verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno «eguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii pas-

<sup>(3)</sup> GALILEO GALILEI, *Opere*, Ediz. Naz., VII (1897), pp. 212-214.



« serete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente  
 « tutte queste cose, benchè niun dubbio ci sia che mentre il vas-  
 « sello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave  
 « con quanta si voglia velocità; chè, (pur che il moto sia uniforme  
 « e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una mini-  
 « ma mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli  
 « potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi  
 « saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, nè,  
 « perchè la nave si muova velocissimamente, farete maggior salti  
 « verso la poppa che verso la prua, benchè, nel tempo che voi sta-  
 « te in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria  
 « al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più  
 « forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua  
 « e voi verso la poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le  
 « goccioline cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne  
 « pur una verso poppa, benchè, mentre la gocciola è per aria, la  
 « nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con più fa-  
 « tica noteranno verso la precedente che verso la susseguente parte  
 « del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qual-  
 « sivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mo-  
 « sche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti,  
 « nè mai accaderà che si riduchino verso la parte che riguarda la  
 « poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso  
 « della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria,  
 « saranno state separate; e se abbruciando alcuna lagrima d'incenso  
 « si farà un poco di fumo, vedrassi ascender in alto ed a guisa di  
 « nugetta trattenersi, e indifferentemente muoversi non più verso  
 « questa che quella parte. E di tutta questa corrispondenza d'effetti  
 « ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose  
 « contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si  
 « stesse sotto coverta; che quando si stesse di sopra e nell'aria  
 « aperta e non seguace del corso della nave, differenze più e men  
 « notabili si vedrebbero in alcuni de gli effetti nominati: e non è  
 « dubbio che il fumo resterebbe in dietro, quanto l'aria stessa; le  
 « mosche parimente e le farfalle, impedito dall'aria, non potrebber  
 « seguir il moto della nave, quando da essa per spazio assai nota-  
 « bile si separassero; ma trattenendovisi vicine, perchè la nave stes-  
 « sa, come di fabbrica anfrattosa, porta seco parte dell'aria sua  
 « prossima, senza intoppo o fatica seguirebbon la nave, e per simil  
 « cagione veggiamo tal volta, nel correr la posta, le mosche impor-  
 « tune e i tafani seguir i cavalli, volandogli ora in questa ed ora

« in quella parte del corpo; ma nelle goccioline cadenti pochissima  
 « sarebbe la differenza, e ne i salti e ne i proietti gravi, del tutto  
 « impercettibile ».

Questa pagina illustra con chiarezza quello che con linguaggio moderno si dice il « principio di Relatività ristretta » secondo GALILEO-NEWTON. Alla base della Meccanica razionale sta il « principio di inerzia » e ogni sistema di riferimento  $S \equiv O(x, y, z; t)$  ( $x, y, z$  coordinate spaziali cartesiane ortogonali,  $t$  tempo) rispetto al quale sia valida la legge di inerzia si dirà « sistema inerziale » o « sistema di riferimento galileiano ». Consideriamo un nuovo sistema di riferimento  $S' \equiv O'(x', y', z'; t')$  che sia in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al precedente. Allora, le leggi della Meccanica galileo-newtoniana valgono tanto rispetto al sistema  $S$  quanto rispetto al sistema  $S'$ : in altre parole, i fatti naturali si svolgono rispetto a  $S'$  proprio con le stesse leggi come rispetto a  $S$  (si osservi che la nave di cui parla GALILEO si muove di moto rettilineo uniforme). Il passaggio da  $S$  a  $S'$  è espresso dalle seguenti formule valide nel caso di riferimenti paralleli

$$x' = x + a_1 t, \quad y' = y + a_2 t, \quad z' = z + a_3 t; \quad t' = t + b;$$

e, più in generale, dalle seguenti:

$$\begin{cases} x' = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_1 t + b_1 \\ y' = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_2 t + b_2 \\ z' = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_3 t + b_3 \\ t' = \phantom{a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z +} t + b \end{cases}$$

nelle quali la « matrice » (cioè il quadro di numeri)  $a_{hk}$  ( $h, k = 1, 2, 3$ ) è quello di una trasformazione ortogonale (si osservi la posizione privilegiata della variabile  $t$  che scandisce il tempo che è comune, sostanzialmente, ai due riferimenti). Interpretando queste formule come una trasformazione dello spazio fisico  $(x, y, z; t)$  in sè, tutte queste trasformazioni costituiscono il « gruppo di GALILEO-NEWTON ».

Che cosa è un gruppo? Lo spiegheremo fra poco; in questo momento osserviamo che detti  $P_1, P_2$  due eventi (cioè punti dello spazio fisico) assegnati mediante le coordinate  $(x_1, y_1, z_1; t_1), (x_2, y_2, z_2; t_2)$

si verificano le uguaglianze in termini finiti

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$$

e anche quelle in termini differenziali

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, dt' = dt,$$

inoltre, detta  $u(x, y, z; t)$  una funzione differenziabile del punto dello spazio fisico e detta  $u'(x', y', z'; t')$  l'espressione ottenuta col cambiamento di variabili assegnato da una qualunque trasformazione del gruppo di GALILEO-NEWTON, con un semplice calcolo si vede che

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Siamo in presenza delle espressioni

$$dx^2 + dy^2 + dz^2, dt, \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

che risultano covarianti rispetto al gruppo di GALILEO-NEWTON.

Lo studio dei fenomeni ottici ed elettromagnetici che esulano dalla Meccanica classica, ha posto in causa la nozione di « contemporaneità di due eventi »; la critica di questo concetto ha condotto a considerare il tempo  $t$  alla stregua delle altre coordinate e ALBERT EINSTEIN è giunto al « principio della relatività speciale » secondo cui le leggi generali della natura sono covarianti, non rispetto al gruppo di GALILEO-NEWTON, bensì rispetto al gruppo delle trasformazioni di H. LORENTZ. Queste trasformazioni, nel caso della traslazione parallela all'asse delle  $x$ , hanno la forma

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(si osservi che  $x$  e  $t$  sono accomunate e  $t$  non è più privilegiata;  $c$  è la velocità della luce,  $c = 3 \cdot 10^5$  Km/sec, grandissima! e  $x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t$  è la trasformazione classica approssimata dalla precedente). Più in generale, la trasformazione di LORENTZ si presenta come una trasformazione lineare, col quadro  $a_{h,k}$  ( $h, k = 1, \dots, 4$ ) completo, e si ottiene componendo la precedente

con altre trasformazioni sulle quali non ci possiamo trattenere: ci basta qui osservare che esse, prese tutte insieme, costituiscono il « gruppo di LORENTZ », rispetto al quale non sono covarianti le espressioni  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  e  $\Delta^2 u$ , bensì sono covarianti le espressioni analoghe

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

che danno il cosiddetto elemento lineare dello « spazio-tempo di MINKOWSKI » e il primo membro dell'« equazione delle onde ».

Le leggi della natura che si inquadrano nella Relatività speciale di EINSTEIN sono covarianti rispetto al gruppo di LORENTZ. Gli studi successivi hanno condotto l'EINSTEIN a formulare un « principio di Relatività generale » e, alla fine, recentemente, una « teoria unitaria della Relatività ». Sempre, questo concetto di covarianza di fronte a un gruppo di trasformazioni è essenziale nella formulazione.

Veniamo adesso ad illustrare, come abbiamo or ora promesso, la nozione di « gruppo ».

Dati  $n$  oggetti distinti essi possono essere disposti in un allineamento, com'è ben noto, in  $n!$  modi diversi: diciamo « sostituzione » sopra questi  $n$  oggetti, il passaggio da uno di questi allineamenti ad un altro, e definiamo come « prodotto » di due sostituzioni il risultato ottenuto alla fine quando si eseguisca la seconda sopra al risultato della prima; per esempio,  $n = 5$ ,

$$s = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, st = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, ts = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(si osservi che  $ts \neq st$ ). Un sistema di tali sostituzioni si dice che costituisce un « gruppo » quando avviene che, insieme a due sostituzioni in esso comunque scelte, esso contiene anche il loro prodotto. Osserviamo, in particolare, che l'insieme di tutte le  $n!$  sostituzioni costituisce un gruppo (il cosiddetto « gruppo totale »); esistono anche gruppi che non esauriscono il gruppo totale essendovi contenuti come « sottogruppi »: per esempio le tre sostituzioni che portano i tre oggetti (1, 2, 3) rispettivamente in (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) costituiscono un gruppo su tre oggetti che è un sottogruppo del



gruppo totale su tre oggetti (formato da  $3! = 6$  sostituzioni); questo sottogruppo è un gruppo « ciclico ».

Nella nozione di gruppo è presente una sola operazione, la composizione sopra accennata, e si intravede che l'interesse sostanziale nei confronti del gruppo è rivolto alla sua « struttura » cioè a quella che potrebbe dirsi la « tabella di composizione » (come una « tavola di moltiplicazione »). Questi concetti si sono presentati in forma esplicita un secolo e mezzo fa, negli studi sulla risoluzione delle equazioni algebriche ( $x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$  oggetti, le radici dell'equazione algebrica). Dopo questa prima comparsa, l'attenzione si è rivolta a tutti i settori delle Scienze matematiche (geometria, statica, cinematica, dinamica, fisica-matematica, fisica teorica, ecc.) nei quali comparivano insieme di enti sottoposti spontaneamente ad un'unica legge di composizione, insieme interpretabili come gruppi (per esempio, componendo due spostamenti rigidi si ottiene uno spostamento

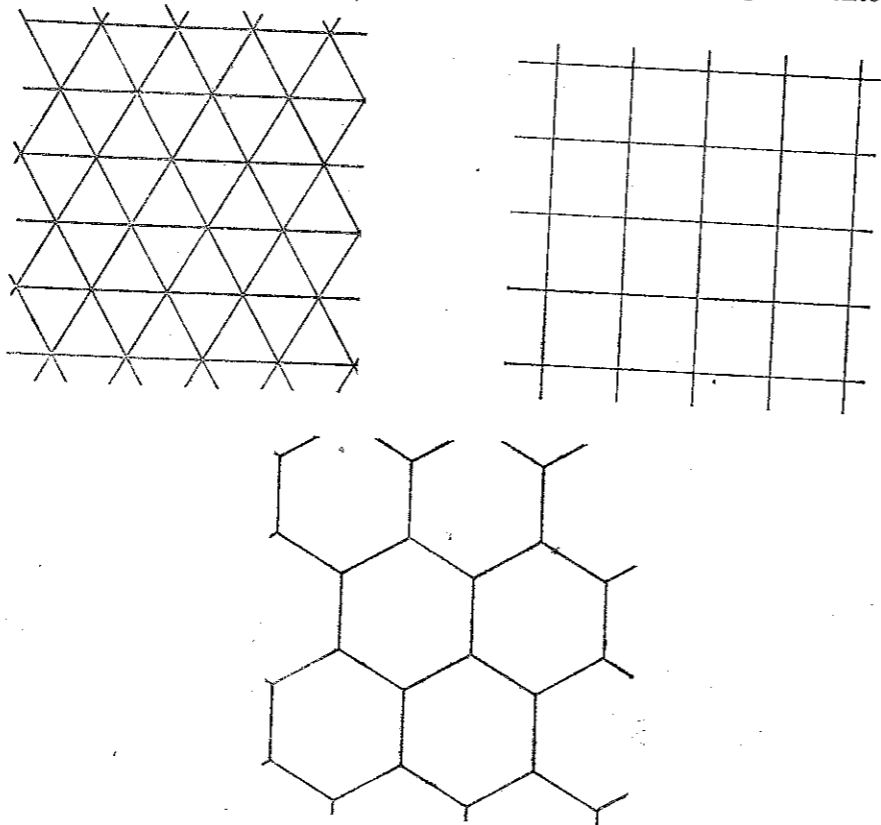


fig. 7

rigido, componendo due omografie si ottiene una omografia ecc.), e si è constatata la grande importanza di tale nozione.

Veniamo a dare alcuni esempi. Esaminiamo i tre reticolati piani regolari della figura 7.

Per ciascuno di essi sono evidenti gli infiniti spostamenti rigidi

I CINQUE POLIEDRI REGOLARI (CORPI PLATONICI)

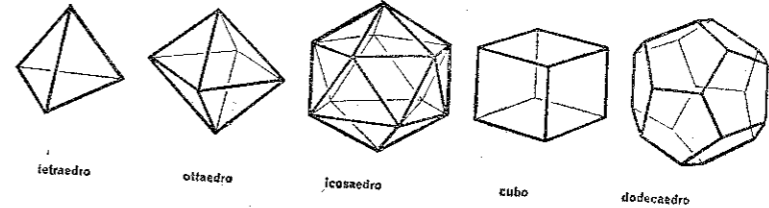


fig. 8

del piano che riportano in sé il reticolato strisciando il piano in sé (spostamenti di 1ª specie) o anche con ribaltamenti (spostamenti di 2ª specie). Il gruppo di tutti gli spostamenti rigidi di 1ª e di 2ª specie, che riportano in sé il reticolato, contiene come sottogruppo quello degli spostamenti di 1ª specie.

L'esame di tutti questi spostamenti pone in rilievo la presenza di infinite simmetrie: intendiamo qui « simmetria » in senso lato, attribuendo a questa parola anche un significato connesso al ritmo e alla regolarità, pertanto anche le traslazioni e le rotazioni.

La Geometria elementare classica fornisce altri esempi insigni di gruppi. La fig. 8 presenta i cinque poliedri regolari platonici: immaginiamo ciascuno di essi inscritto

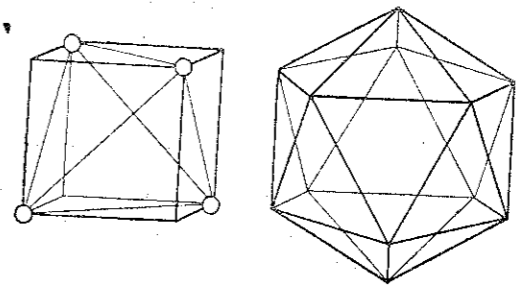
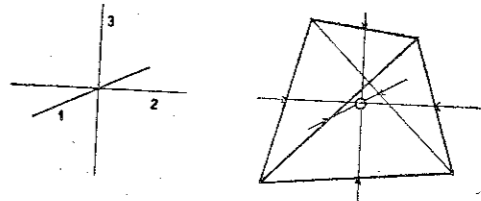
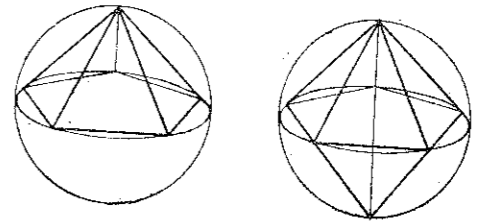


fig. 9

in una sfera. Notiamo, per esempio, che l'ottaedro e il cubo sono fra loro « duali », nel senso che i piani tangenti alla sfera circoscritta all'ottaedro, nei vertici dell'ottaedro stesso, sono le facce di un cubo circoscritto alla sfera; analogamente il dodecaedro e l'icosaedro sono fra loro duali, il tetraedro è duale di se stesso. Le rotazioni della sfera che riportano in sè il poliedro regolare in essa inscritto costituiscono

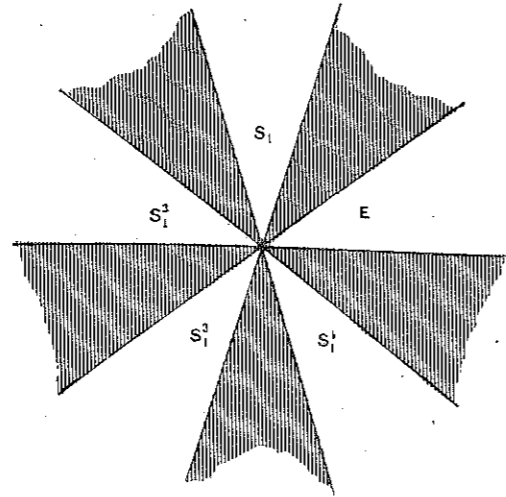


fig. 10

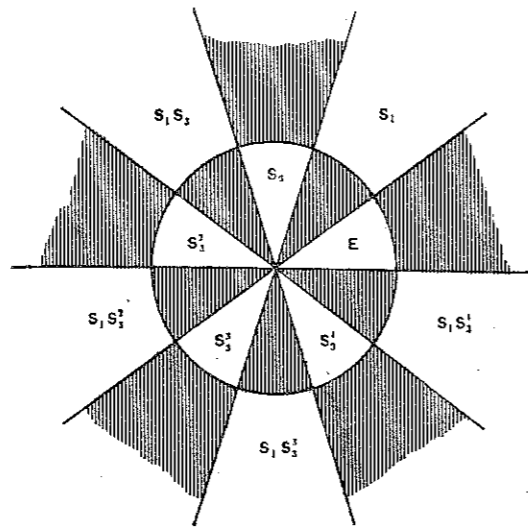


fig. 11

un gruppo, e abbiamo così i gruppi del tetraedro, dell'ottaedro (o del cubo) e dell'icosaedro (o del dodecaedro). Si tratta di gruppi finiti, cioè costituiti da un numero finito di rotazioni: per esempio, del gruppo del cubo fanno parte 24 rotazioni (compresa l'« identità » che lascia il poliedro fermo).

La ricerca dei gruppi finiti di rotazioni della sfera in sè conduce a stabilire l'esistenza dei gruppi illustrati schematicamente dalla fig. 9, e cioè: il gruppo della piramide regolare, della doppia piramide regolare, del triedro trirettangolo, del tetraedro, del cubo e dell'icosaedro. Una osservazione di passaggio sulla figura: notiamo che i quattro vertici del cubo contrassegnati con un cerchietto sono i vertici di un tetraedro regolare; il gruppo del cubo è così strutturato che esso possiede come sottogruppo quello del tetraedro.

I movimenti rigidi della sfera in sè si possono esprimere analiticamente nello spazio cartesiano e le formule che li rappresentano sono enti analitici soggetti alle leggi di composizione dettate dal gruppo stesso che lascia fermo il poliedro; ma più interessante, sotto certi punti di vista, è la rappresentazione che di questi gruppi si ottiene interpretandoli come trasformazioni del piano della variabile complessa in sè: questo piano, sul quale è distesa la variabile complessa  $z$ , è da interpretarsi come una « retta sul campo complesso » e le trasformazioni che fanno passare da  $z$  a  $z'$  (« sostituzioni lineari » su  $z$ ) danno, col loro insieme, una rappresentazione analitica del gruppo.

Le figure 10, ..., 14 mostrano le rappresentazioni sul piano complesso rispettivamente dei gruppi della piramide regolare, della doppia piramide regolare, del tetraedro, del cubo e dell'icosaedro; in esse sono segnate certe regioni, dette « regioni fondamentali », sulle quali non ci è consentito di soffermarci; ci basterà richiamare que-

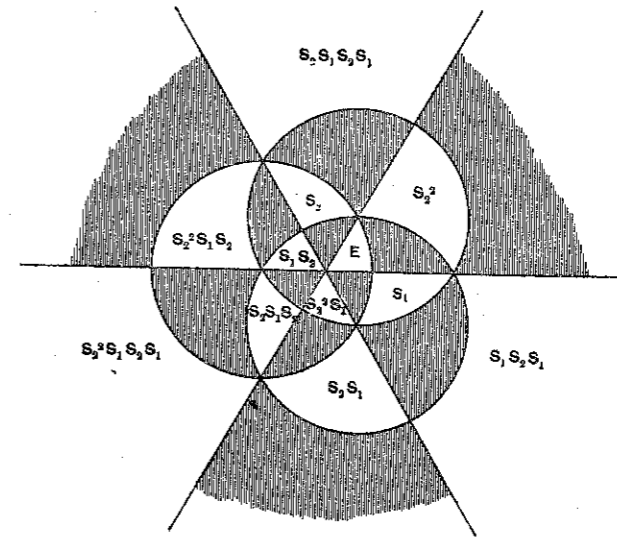


fig. 12

sto fatto: il campo numerico complesso è un ambiente costituito di infiniti elementi (i numeri complessi) sul quale vengono a strutturarsi quei sistemi di « simmetrie » in senso lato, posti in evidenza dalle figure e, quello che più conta, rappresentabili analiticamente mediante semplici formule.



Ricordiamo, di passaggio, fra i gruppi di spostamenti rigidi: il gruppo di tutti gli spostamenti elicoidali con un asse assegnato, il gruppo di tutti gli spostamenti elicoidali con un asse assegnato e il passo assegnato (sottogruppo del precedente) e, più in particolare, il gruppo di tutti gli spostamenti rotatori con un asse assegnato.

Alcuni matematici insigni, persone di gusto raffinato, sensibili alla bellezza dell'arte classica (fra questi i contemporanei GEORGE

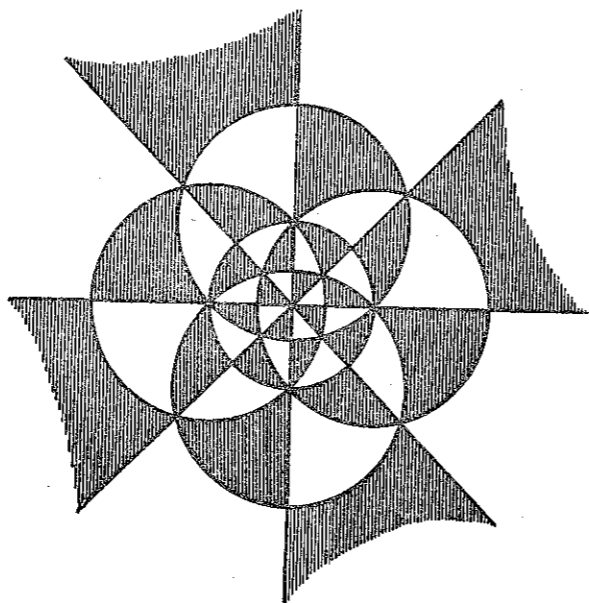


fig. 13

D. BIRKHOFF, ANDREAS SPEISER, HERMANN WEYL) si sono posti il problema di ricercare quali fossero le ragioni di tale bellezza. Hanno indagato le forme dei vasi, dei motivi ornamentali contenuti nei mosaici, nelle pitture, nei tappeti orientali, le strutture architettoniche... per ricercarvi le simmetrie e quello che potremmo dire le strutture gruppali che costituiscono l'ossatura di forma, istintivamente espressa o volutamente cercata dagli artisti e dagli artigiani. Questi matematici hanno accompagnato le loro emozioni con deduzioni connesse a concetti gruppali. Qui presenterò un solo esempio di opera d'arte per un esame a vista secondo l'ordine di idee or ora accennato.

La figura 15 rappresenta una targa votiva dell'epoca ellenistica che è ricchissima di spunti secondo le vedute segnalate.

L'ampiezza del tema del discorso non consente di fermarci ulteriormente su queste considerazioni e passeremo ad affrontare un altro ordine di idee che ritengo attuale e interessante.

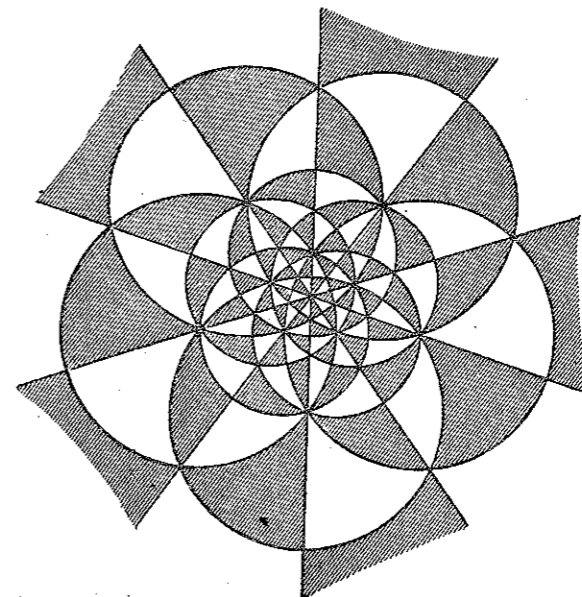


fig. 14

Incominciamo col presentare una serie di figure attinenti alle Scienze naturali e alla Chimica biologica molecolare: noi le guarderemo filtrando solamente il loro aspetto matematico.

In questa fig. 16, tratta da un recente listino della Enciclopedia della Scienza e della Tecnica Mondadori, si trova, a sinistra, la rappresentazione schematica della disposizione delle molecole d'acqua nel reticolo cristallino del ghiaccio; a destra, la rappresentazione schematica della solvatazione degli ioni di una molecola di cloruro di sodio. Sorgono evidenti strutture geometriche che rivelano la presenza di gruppi.

Volgiamo per un momento il pensiero da questi modelli del microcosmo all'universo stellato. L'armonia dei cieli, constatata dall'Astronomia antica venne posta in luce con le leggi di KEPLERO e con la legge di gravitazione universale enunciata da NEWTON;

queste leggi hanno netta formulazione matematica. Al di fuori di queste leggi, il cielo, a chi lo guardi, apparisce come un caos. Volgiamo invece lo sguardo a ciò che ci circonda sulla Terra: le armonie più vive e più sentite si presentano in natura nell'inorganico (pensiamo ai cristalli) e ancora più negli esseri viventi (pensiamo a

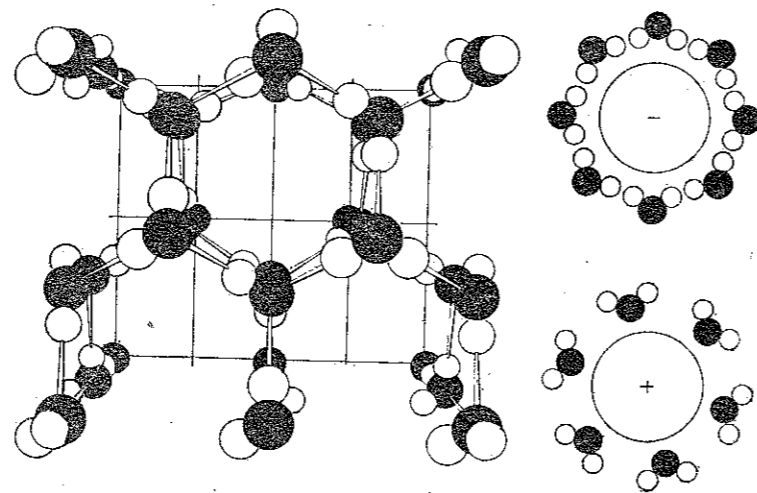


fig. 16

un fiore, a una stella marina, ...). Guardando questi oggetti o questi esseri riceviamo l'impressione di un armonico ordine: ed è ancora il linguaggio matematico che ci consente di chiarire e comunicare certi aspetti nel substrato di quelle impressioni.

Un ulteriore e più microscopico esame di questi esseri, alla luce della Scienza moderna, ci porterebbe a cogliere in loro un certo « quasi ordine », intendo dire un ordine di tipo statistico, all'interno di una affannosa brulicante evoluzione della quale noi, ignari, cogliamo soltanto qualcuno degli aspetti risultanti e globali: ma, ancora, le leggi che governano quella evoluzione, sia dal punto di vista macroscopico che da quello statistico-microscopico, e i modelli di questi esseri creati dall'intelletto per rappresentare quella evoluzione rientrano nell'ambito della Matematica. Essa, per esempio, ci esorterà alle « simmetrie »: le simmetrie in senso lato che sussistono nelle condizioni ambientali, unite ad altri fattori, come le necessità vitali e di locomozione, hanno influenza sulla forma degli esseri viventi, sull'evoluzione di questa forma e sulle simmetrie in essa risultanti. Un'opera molto interessante di H. WEYL tratta in modo

magistrale di questo argomento; per illustrare il concetto sopra adombrato, riportiamo da quest'opera il seguente brano<sup>(4)</sup>.

« Se in una porzione di materia l'unica limitazione al riprodursi della simmetria generale delle leggi di natura è la casualità della posizione  $P$  della materia stessa, questa assumerà la forma di una sfera con centro in  $P$ . Così le più basse forme animali, creature microscopiche sospese nell'acqua, sono pressochè sferiche. Invece per gli organismi fissati al fondo dell'oceano la direzione della gravità è un elemento importante, che esclude dalla classe delle operazioni di simmetria tutte le rotazioni attorno al centro  $P$ , limitando tale classe alle sole rotazioni attorno ad un asse. Ma, per gli animali capaci di moto autonomo nell'acqua, nell'aria o sulla terra, tanto la direzione postero-anteriore del loro moto quanto la direzione della gravità hanno un'influenza decisiva. Essendo così determinati gli assi antero-posteriore e quello dorso-ventrale, e di conseguenza quello destro-sinistro, resta arbitraria solo la distinzione fra sinistra e destra; e a questo stadio non possiamo aspettarci una forma di simmetria più alta di quella bilaterale. I fattori che tendono a introdurre differenze ereditabili fra destra e sinistra nell'evoluzione filogenetica possono essere facilmente frenati dai vantaggi che un animale trae dalla formazione bilaterale dei propri organi di locomozione, le ciglia, i muscoli, gli arti. Da uno sviluppo asimmetrico di questi organi deriverebbe naturalmente un incedere a vite anzichè in linea retta. Questo potrebbe aiutarci a spiegare perchè i nostri arti seguono la legge della simmetria più rigorosamente dei nostri organi interni ».

Riportiamo, ancora da H. WEYL, le seguenti figure: la figura 17 (ripresa da E. HAECKEL) presenta forme con una simmetria di rotazione di ordine 5 in animali inferiori (Echinodermi). La figura 18 rappresenta la conchiglia della *Turritella duplicata* ed « è davvero sorprendente vedere con quale esattezza la larghezza delle spire consecutive di questa conchiglia segua la legge

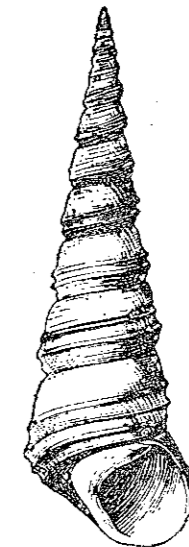


fig. 18

<sup>(4)</sup> H. WEYL, *Symmetry*, Princeton U.S.A. 1952; *La simmetria*, Feltrinelli, Milano 1962; pp. 34-35.



della progressione geometrica». La figura 19 rappresenta la conchiglia del *Nautilus*, che si evolve seguendo mirabilmente la spirale logaritmica, cioè la spirale che incontra sotto angolo costante le semirette uscenti dal polo e che guida, per così dire, un « gruppo continuo ».

Ritengo utile di leggere Loro alcuni brani di una conferenza tenuta, nel gennaio di quest'anno (1963) a Milano, dal premio Nobel FRANCIS COMPTON CRICK su « Le basi molecolari della biologia »<sup>(5)</sup>. Io sono assolutamente incompetente in quella materia; tuttavia, ritengo che la citazione di questi brani possa segnalare il vasto orizzonte che si apre in quel campo per la schematizzazione matematica e i servizi, probabilmente notevoli, che questa schematizzazione potrà rendere. Farò precedere questa lettura dalla presentazione di alcune figure riguardanti modelli di molecole che interessano la biologia. La figura 20 è uno schema di catena polipeptidica<sup>(6)</sup>: tale schema è da concepirsi nello spazio ed apparisce evidente il suo prolungamento per periodicità e la struttura elicoidale dello schema prolungato.

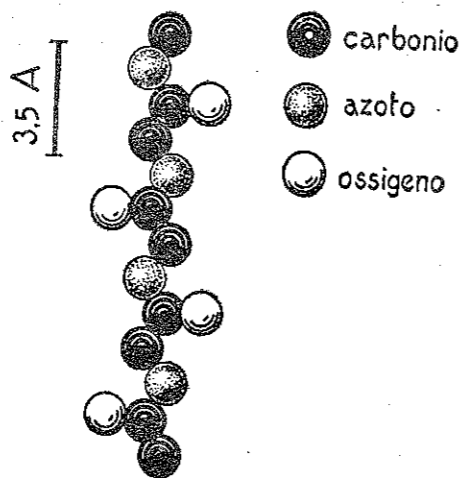


fig. 20

Lo studio dell'acido desossiribonucleico (ADN) mediante la diffrazione ai raggi X, condotto per lunghi anni, ha consentito a WATSON e CRICK, nel 1953, di prospettare uno schema della sua molecola: essa si configura, nella parte essenziale, secondo una doppia elica cilindrica (vedi figura 21) come è presentata soltanto in parte in questa figura. I filamenti elicoidali sono costituiti da tanti ato-

<sup>(5)</sup> F. C. CRICK, *Le basi molecolari della biologia*, Gazzetta Sanitaria, Milano, Anno 84 (1963), n° 1/2, pp. 3-17.

<sup>(6)</sup> Da S. RANZI, *Zoologia*, Milano, 1961, p. 5. Mi è grato qui esprimere i miei ringraziamenti al collega prof. SILVIO RANZI per i preziosi orientamenti che gentilmente mi ha fornito per la parte del mio discorso attinente alla biologia molecolare.

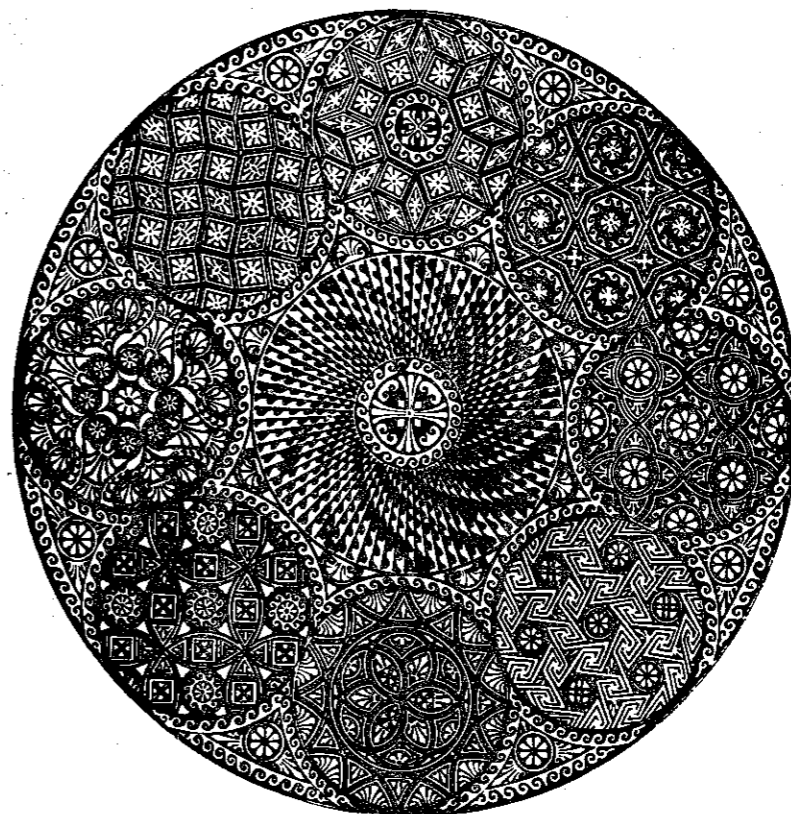


fig. 15



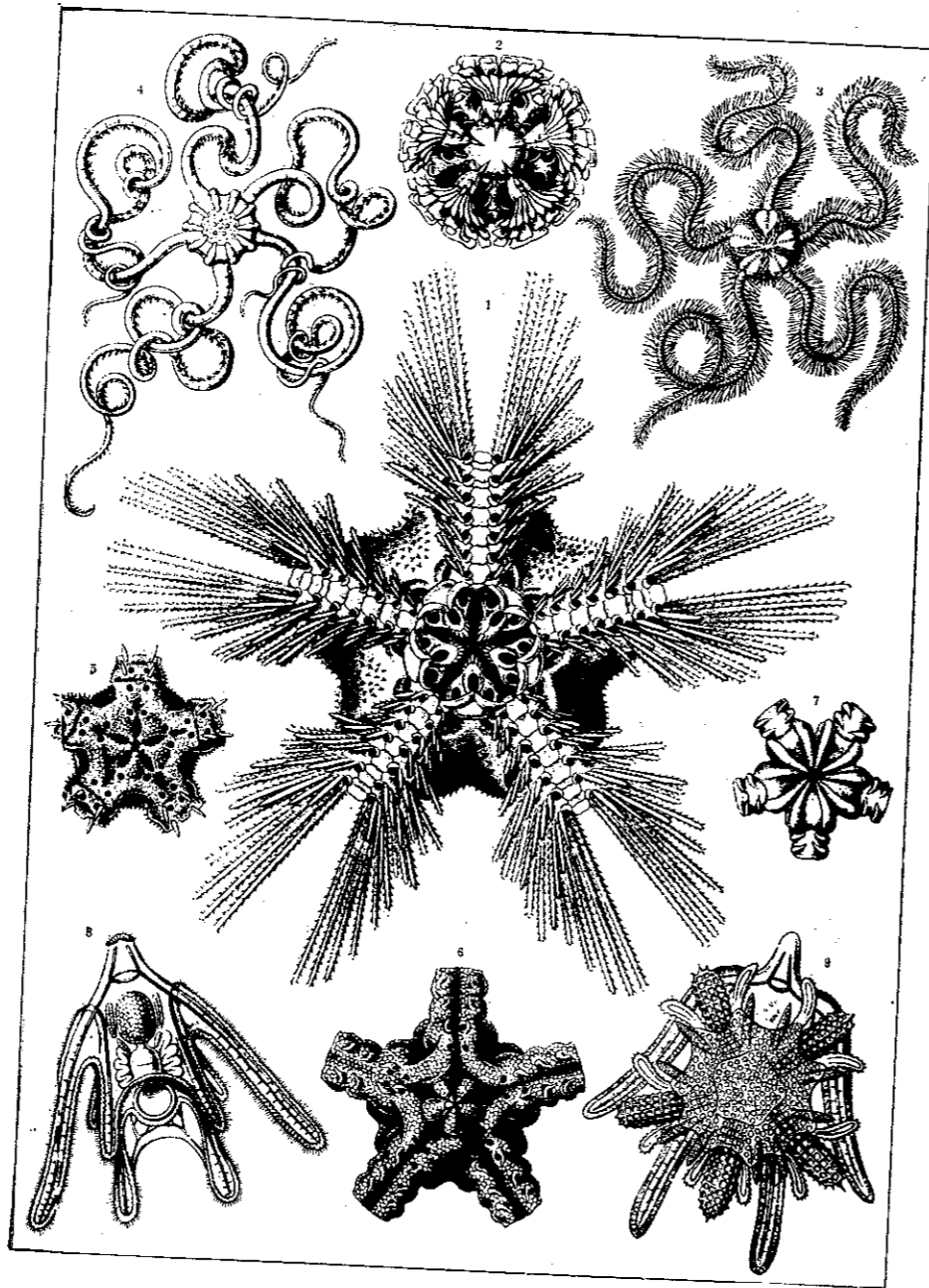


fig. 17

ACHILLEA - MILANO

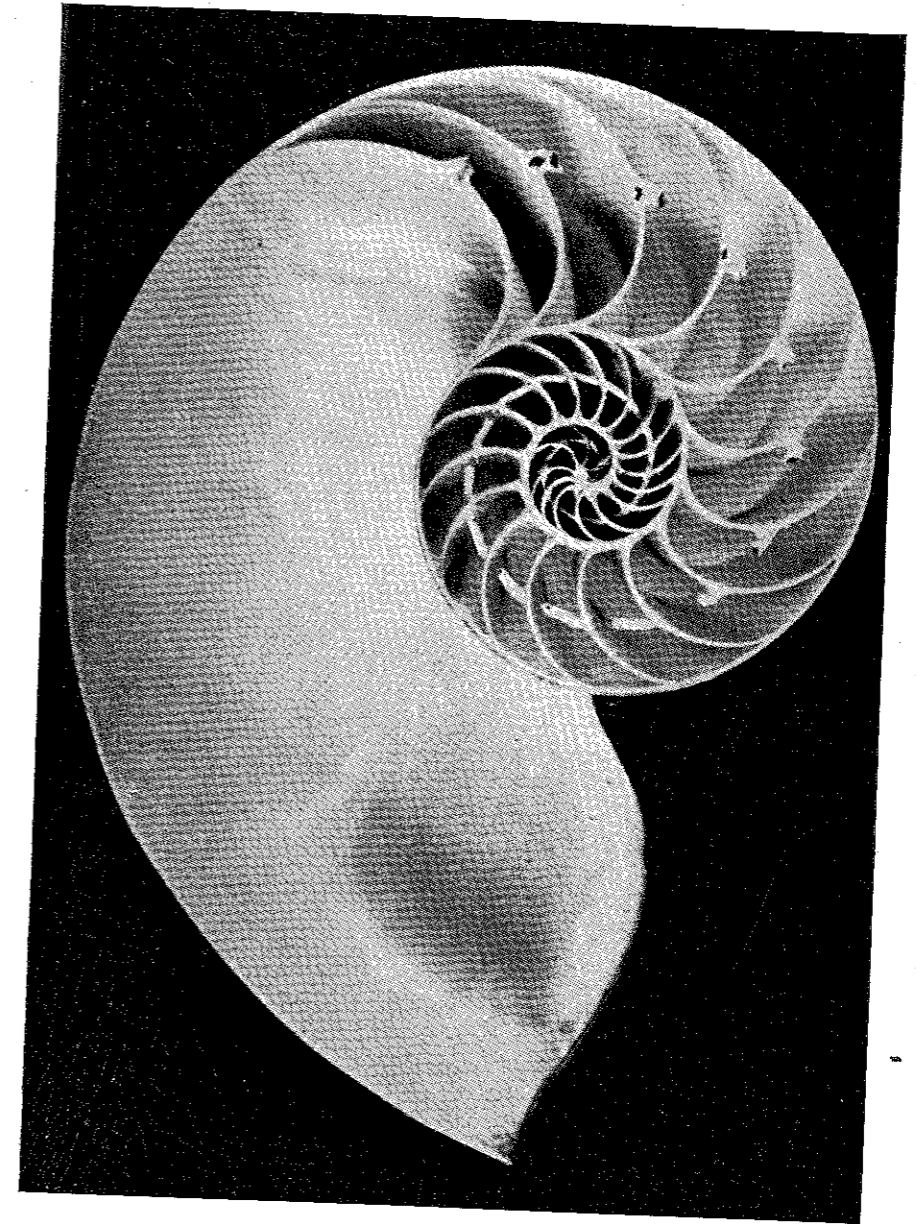


fig. 19

MILANO  
Anno 1964



mi vincolati da legami chimici molto forti: sussistono anche legami più deboli che connettono trasversalmente le due eliche cilindriche. Noi, in questo momento, vogliamo soltanto osservare l'aspetto geometrico del modello: le sue intime e varie strutture sorgerebbero

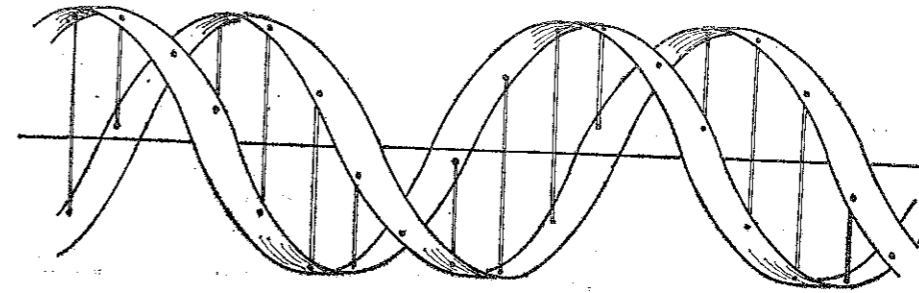


fig. 21

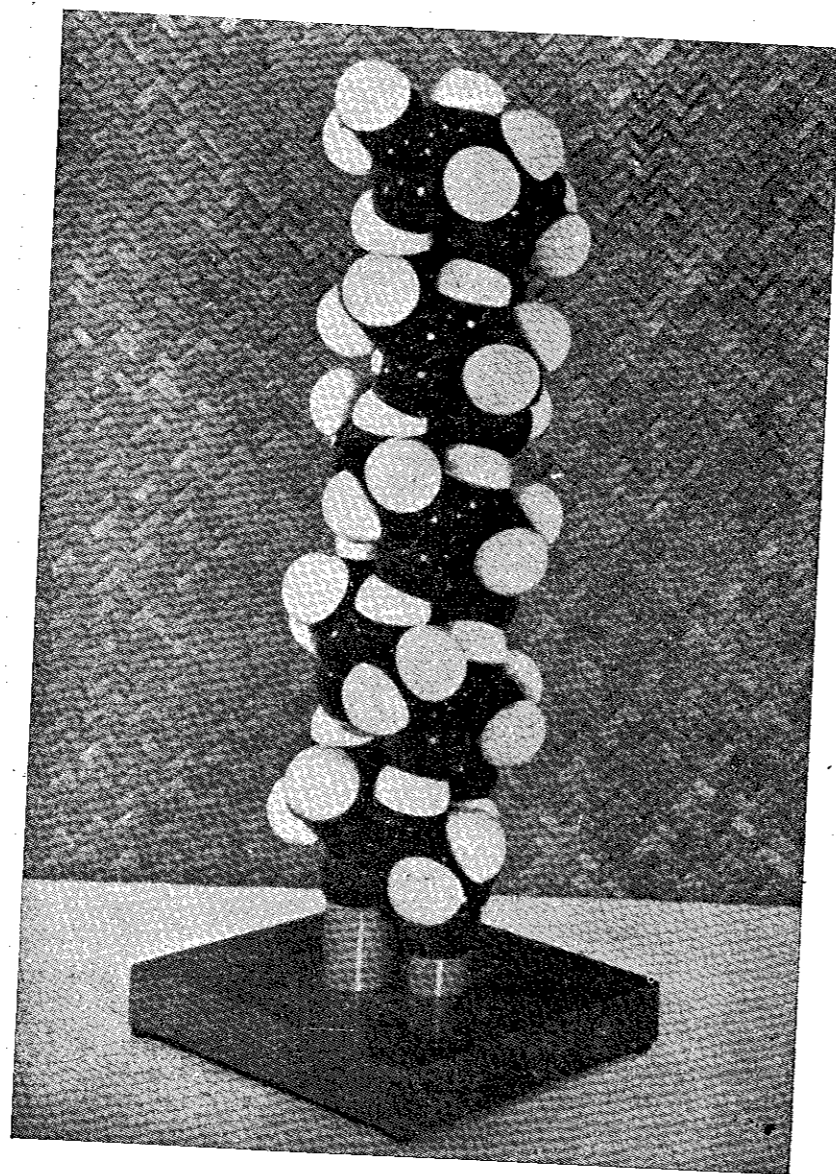


fig. 23

nell'esame dei segmenti del filamento e dei legami trasversali; le successioni di questi presentano varietà ancora attinenti alla « Matematica del finito » e strutture la cui analisi combinatoria fa pensare per analogia all'analisi del linguaggio. La figura 22 presenta un altro schema raffigurante una cosiddetta  $\alpha$ -elica (7) e la figura 23 mostra la fotografia di un modello di  $\alpha$ -elica nella quale la catena polipeptidica rappresenta un poliglicine.

È interessante osservare come le  $\alpha$ -eliche si possono associare in sistemi: questo viene mostrato nella fig. 24 nella quale appaiono di tali sistemi. Il più complesso di quelli qui presentati consta di sei  $\alpha$ -eliche avvolte intorno ad una settima che ne costituisce l'elica mediana: in esso appaiono la simmetria rotatoria di ordine 6 e quella elicoidale lungo l'asse.

Adesso lasciamo parlare una delle più grandi autorità in questa materia. FRANCIS COMPTON CRICK dice:

« Osserviamo la natura nel suo insieme: le piante, gli animali, « i microrganismi, i virus e via dicendo. Che cosa ci colpisce a prima « giunta? Direi che la prima impressione è la diversità di questi « esseri viventi. Alcuni sono molto grossi, altri molto piccoli; alcuni « sono rosei, altri sono verdi, e così via. Se noi guardassimo la na- « tura con gli occhi di un avvocato, o di un ingegnere, o qualcosa

(7) Le figure 22, 23, 24 sono tratte da R. B. COREY-L. PAULING, *The configuration of Polypeptide Chains in Proteins*; Convegno Baselli, Rend. Ist. Lombardo, 1955, pp. 10-37.



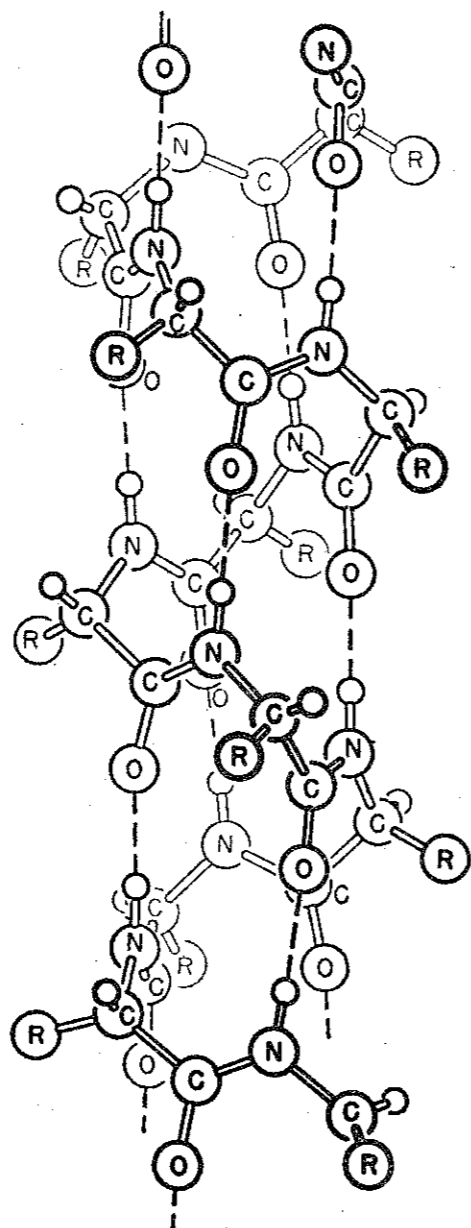


fig. 22

« del genere, non sospette-  
« remmo mai che tutti que-  
« sti esseri abbiano qualcosa  
« in comune.

« Ma se osserviamo più  
« da presso, al livello bio-  
« chimico, e consideriamo le  
« molecole di cui gli esseri  
« viventi sono fatti, scopria-  
« mo subito un fatto impor-  
« tantissimo, che io credo  
« non sia sufficientemente  
« sottolineato nei nostri pro-  
« grammi di insegnamento.  
« Noi scopriamo cioè che le  
« molecole basilari (che de-  
« scriverò fra poco partico-  
« lareggiatamente) sono stra-  
« ordinariamente simili in  
« tutta la natura, dagli esseri  
« più minuscoli ai più gi-  
« ganteschi, dai più semplici  
« ai più complicati.

« In particolare, osser-  
« vando gli esseri viventi  
« più semplici, vediamo che  
« vi sono due famiglie di  
« molecole, non molto sem-  
« plici di per se stesse ma  
« ben definite: e queste due  
« famiglie noi ritroviamo si-  
« stematicamente in quasi  
« tutti gli esseri viventi.  
« Esse sono rappresentate in  
« primo luogo dagli acidi  
« nucleici (l'acido desossini-  
« bonucleico e l'acido ribo-  
« nucleico) e in secondo luo-  
« go dalle proteine. Ciò che

« sorprende è che i pezzi, i componenti di cui gli acidi nucleici e le  
« proteine sono fatti, sono esattamente gli stessi in tutte le forme vi-  
« venti che esistono in natura. Gli acidi nucleici sono fatti di quattro  
« unità fondamentali, leggermente diverse nei due tipi di acido ma  
« costanti in natura; le proteine sono fatte di venti unità differenti,  
« ciascuna delle quali è parimente  
« universale.

« Un'altra proprietà delle due  
« famiglie di molecole è implicita  
« in quanto ho appena detto, e  
« cioè che queste molecole sono  
« fatte secondo un piano di costru-  
« zione semplice ed uniforme. En-  
« trambe sono strutture di forma  
« allungata, a catena. Entrambe  
« hanno una lunga spina dorsale  
« chimica... Le differenze risie-  
« dono nelle catene laterali che vi  
« si attaccano: di cui, come ho  
« detto, vi sono quattro tipi negli  
« acidi nucleici e venti tipi nelle  
« proteine. Si può dire che queste  
« molecole, ancorchè assai grandi,  
« sono costruite secondo piani  
« piuttosto semplici e perciò non

« sono oltremodo complicate nonostante la loro grande massa: inoltre,  
« sono sempre le stesse in tutta la natura... Noi crediamo che la  
« complessità attuale della materia vivente si sia sviluppata attraverso  
« un processo di cambiamenti casuali, non predeterminati; e un siffatto  
« meccanismo, capace di realizzare una grande complessità di forme  
« da avvenimenti casuali, è quello suggerito più di cento anni fa da  
« CHARLES DARWIN, e precisamente il meccanismo della selezione  
« naturale...

« Può essere interessante paragonare queste strutture al lin-  
« guaggio scritto, col quale ci esprimiamo. Nella lingua un paragrafo  
« scritto col nostro alfabeto di venti lettere o poco più è pressapoco  
« lungo quanto una proteina. È una catena allungata — anche se  
« scriviamo il paragrafo su parecchie righe, il linguaggio ivi espresso  
« è in effetti continuo; ed è costituito di unità semplici attaccate  
« di seguito. Il significato del paragrafo dipende dalle precise rela-  
« zioni fra le lettere che compongono le parole e fra le parole che

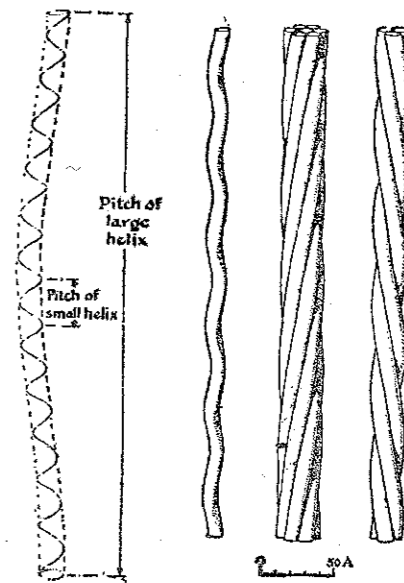


fig. 24



«compongono la frase. Ecco dunque che anche noi ci serviamo di «un semplice alfabeto per esprimere idee complesse.»...

Dopo aver accennato a varie ipotesi sulle prime molecole comparse sulla Terra capaci di prestarsi a un processo di selezione CRICK prosegue:

«Ad ogni modo è giustificato credere che la vita sia invero un avvenimento non comune, perchè alla fin dei conti la ragione per cui la vita è così fondamentale è simile in tutta la natura, assai probabilmente è che la vita ebbe origine una unica volta, e questo deve renderci molto circospetti nel fare previsioni sulla probabilità di questo processo. Il problema della vita in altri mondi è affascinante. Sebbene la cifra esatta non sia conosciuta, si pensa che vi sia circa un milione di pianeti nella nostra Galassia a un dipresso adatti a mantenere la vita».

I brani che abbiamo riportato della conferenza di CRICK ci segnalano l'interesse delle figure schematiche presentate poco fa anche per le loro connessioni con qualche concetto matematico: qui possiamo vedere il concetto di gruppo, quello di «grafo» del quale parleremo fra un momento e, nel fondo, anche connessioni con l'analisi del linguaggio alla quale si può attendere con l'uso di moderni calcolatori elettronici.

### I grafi.

Osserviamo per un momento le tre figure geometriche contenute nella fig. 25: ciascuna di esse rappresenta un «grafo» o, anche detto, «singramma». In sostanza un grafo è un insieme di punti (vertici) ciascuno dei quali è collegato, mediante una o più linee (spigoli) ad uno o più altri (non è escluso che una linea congiunga un punto con se stesso cioè parta da un punto e ritorni sul punto stesso senza passare per altri vertici): sugli spigoli dei grafi qui presentati non è fissato un verso come verso diretto e si tratta di grafi non orientati. Vengono considerati anche i grafi nei quali gli spigoli sono orientati. L'insieme dei vertici e degli spigoli di un poliedro regolare è un esempio di grafo. Esistono grafi particolari che si chiamano alberi (sono quelli connessi che non presentano alcun ciclo costituito di spigoli). Non possiamo trattenerci sulle nozioni attinenti ai grafi: vogliamo soltanto insistere qui sul fatto che la nozione di «grafo» non è legata alla forma geometrica nel senso che un grafo, comunque venga deformato rispettando la con-

tinuità, rimane sempre il medesimo: così, un'ulteriore riflessione ci persuaderebbe che la nozione di grafo è puramente combinatoria. Per esempio un grafo orientato non è altro, astrattamente, che un insieme  $X$  di oggetti distinti  $x$  e una legge (non necessariamente univoca) che conduce da ognuno degli oggetti  $x$  a uno o più oggetti  $y, z, \dots$  ancora appartenenti a  $X$ . In alcune questioni può essere

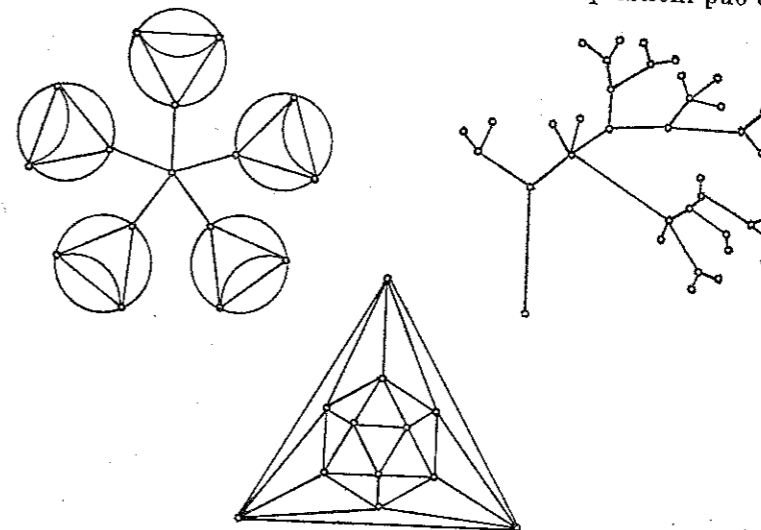


fig. 25

utile la considerazione di grafi caricati nei quali a ciascun vertice è attribuito un peso e a ciascuno spigolo uno o più numeri che possono interpretarsi come lunghezza ideale e intensità ideale ecc. Si possono immaginare grafi finiti e anche infiniti (costituiti da infiniti elementi).

Il controllo del traffico di una rete stradale pone dei problemi interpretabili su grafi e la cui risoluzione si può valere della teoria dei grafi stessi; si tratta di problemi attuali che vengono programmati per gli elaboratori elettronici e questi forniscono la soluzione: in sostanza, l'elaboratore elettronico realizza la simulazione del traffico e fenomeni che dovrebbero essere oggetto di lunghe osservazioni nella realtà per trarne delle conclusioni possono invece essere sperimentati «in vitro», se così fosse concesso di esprimersi.

Anche nello studio della biofisica i grafi trovano applicazione<sup>(8)</sup> come è illustrato nella recente opera di N. RASHEVSKY. Qui, anzi-

<sup>(8)</sup> Vedasi per es. N. RASHEVSKY, *Mathematical biophysics*, Vol. 2, New York, 3<sup>a</sup> ed. 1960, Chap. XXX-XXXII, *Organisms and Graphs*, ecc. pp. 345-389.

chè trattenermi sulle interessanti considerazioni di questo autore, preferisco accennare a una ricerca matematica veramente acuta, svolta da P. ERDŐS e A. RÉNYI, pubblicata in una rivista ungherese nel 1960<sup>(9)</sup> e costituente uno studio sulla evoluzione aleatoria dei grafi: i risultati di questa ricerca sono, sotto certi punti di vista, inattesi e sorprendenti.

Siano  $n$  e  $N$  rispettivamente il numero dei vertici e il numero degli spigoli di un grafo; supponiamo che gli  $N$  spigoli siano scelti a caso fra tutti gli  $\binom{n}{2}$  spigoli possibili e la legge aleatoria sia così concepita che tutte le possibili scelte (il cui numero è quello delle combinazioni di  $\binom{n}{2}$  oggetti presi ad  $N$  ad  $N$ ) siano equiprobabili. Scelto a caso uno spigolo, se ne scelga un altro a caso fra gli  $\binom{n}{2} - 1$  rimanenti e così continuiamo: dopo averne scelti  $k$ , ciascuno degli  $\binom{n}{2} - k$  rimanenti hanno la stessa probabilità di presentarsi nella scelta successiva; in queste ipotesi, viene studiata l'evoluzione del grafo mentre  $N$  cresce, cercando di individuare la struttura « tipica » ad un assegnato stadio di evoluzione cioè quando si concepisca  $N$  assegnato uguale, o asintoticamente uguale, a una funzione  $N(n)$  di  $n$  (asintoticamente per  $n$  indefinitamente crescente!). Per struttura tipica si intende una struttura tale che la sua probabilità di presentarsi tende a 1 per  $n$  indefinitamente crescente e  $N = N(n)$ . Sia  $A$  una determinata proprietà; denotiamo con  $C(n, N)$  e  $A(n, N)$  rispettivamente il numero dei grafi di  $n$  vertici e  $N$  spigoli e quello degli stessi grafi che possiedono la proprietà  $A$ , allora si può dire che « quasi tutti » i grafi di  $n$  vertici e  $N = N(n)$  spigoli possiedono quella proprietà quando avviene che  $A(n, N) : C(n, N) \rightarrow 1$  per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $N = N(n)$ .

I predetti autori pervengono, tra l'altro, al risultato che per alcune proprietà  $A$  fondamentali di struttura del grafo, esiste una funzione  $A(n)$  crescente, tendente all'infinito, che risulta una « funzione soglia » della proprietà  $A$  in esame: cioè, quando si ricerca la struttura tipica del grafo in un certo stadio di evoluzione  $N = N(n)$ , allora si dimostra che esiste una funzione soglia  $A(n)$  tale che la probabilità di presentarsi è zero se  $N(n)/A(n) \rightarrow 0$  ed è uno se  $N(n)/A(n) \rightarrow +\infty$ . Vengono anche studiate certe funzioni soglia regolari e funzioni di distribuzione soglia. Teoremi di questo genere ci fanno intravedere, almeno alla lontana, la loro utilità per lo

<sup>(9)</sup> P. ERDŐS-A. RÉNYI, *On the evolution of random graphs*, Publication of the Mathem. Institute, Hungarian Acad. of Sciences, 5, A, 1960, pp. 17-61.

studio delle forme in natura: questo ordine di idee nel quale confluiscono l'aspetto aleatorio e quello dell'analisi infinitesimale per l'asintoticità partendo da un modello combinatorio (il grafo) ci è sembrato tanto interessante da doverlo segnalare, almeno di sfuggita.

Ripensando ai grafi come enti rappresentativi di organismi viventi in evoluzione si presenta dentro di noi la domanda: arriverà l'uomo a vedere fondo nel perchè un essere vivente prende, nella fase finale del suo sviluppo, una forma piuttosto che un'altra? In una prospettiva forse lontana nel tempo si sentono problemi affascinanti.

### Ergodicità.

I diversi aspetti del pensiero matematico fin qui presentati, e sono soltanto alcuni, ci consentono di apprezzare la sua utilità nell'indagine sul mondo della natura: la sua fecondità si rivela straordinaria specialmente quando le condizioni storiche conducono alla collaborazione fra alcuni di tali aspetti per dar vita a nuove teorie e a nuove rappresentazioni. Riteniamo utile, ai fini del nostro discorso, di aprire uno spiraglio ancora su due settori nei quali si è verificato il fenomeno di detta collaborazione: intendiamo parlare della « teoria ergodica » e della « teoria dei giochi ».

Nella teoria ergodica confluiscono l'Analisi infinitesimale, sia classica che evoluta nella teoria delle funzioni di variabile reale, l'Analisi dei fenomeni aleatori e, nel fondo, come direttrici nascoste, anche le proprietà aritmetiche degli enti considerati (cioè quelle proprietà degli enti appartenenti a spazi continui che si rivelano mediante le approssimazioni di essi costruite entro sottospazi discontinui).

La Meccanica razionale classica è di tipo deterministico: negli schemi che essa contempla, un sistema meccanico ad  $s$  gradi di libertà è individuato, per esempio, dalle  $2s$  variabili di HAMILTON  $(q_1, q_2, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_s)$  delle quali  $q \equiv (q_1, \dots, q_s)$  assegnano la posizione e  $p \equiv (p_1, \dots, p_s)$  assegnano i momenti ( $q$  e  $p$  insieme assegnano posizione e atto di movimento). La classica funzione  $H(p, q; t)$  di HAMILTON (energia totale del sistema nel caso dinamico) consente di esprimere nella cosiddetta forma « canonica »

$$\frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \quad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \quad (h = 1, \dots, s)$$



il sistema di equazioni differenziali (del primo ordine) che governa il movimento del sistema meccanico: le  $2s$  funzioni  $q_h(t), p_h(t)$  risultano univocamente determinate dalle condizioni all'istante iniziale  $t_0$ ,  $(q_h(t_0) = q_h^0, p_h(t_0) = p_h^0)$  definite dalla configurazione e dall'atto di movimento in detto istante. Il sistema delle  $2s$  funzioni  $q_h(t), p_h(t)$  descrive la storia futura ( $t_0 \leq t < +\infty$ ) e passata ( $-\infty < t \leq t_0$ ) del sistema meccanico. Si consideri lo spazio  $\Sigma^{2s}$  a  $2s$  dimensioni di vettori  $x = (q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s)$  a  $2s$  componenti, detto (seguendo W. J. GIBBS) «spazio delle fasi». Ogni punto  $x$  rappresenta collettivamente la configurazione e l'atto di movimento; l'integrale  $x = x(t)$  è una linea  $\Gamma$  di  $\Sigma^{2s}$  che si dice «traiettoria». Se il sistema è isolato, l'energia si mantiene costante e la funzione  $H$  di HAMILTON risulta  $H = H(q, p)$  (cioè non dipende esplicitamente dal tempo  $t$ ) ed è inoltre  $H(q(t), p(t)) = c$  (costante lungo la  $\Gamma$  al variare di  $t$ ): la traiettoria  $\Gamma$  descritta dal punto  $x = x(t)$  (immagine del sistema all'istante  $t$ ), partendo dal punto  $x^0 = x(t_0)$  si svolge, nello spazio delle fasi  $\Sigma^{2s}$ , tutta contenuta (come una lunga matassa) sulla varietà (ipersuperficie) di equazione  $H(p, q) = c$  che caratterizza il livello di energia. Osserviamo per esempio che il sistema costituito da  $n$  particelle materiali ( $n$  molecole) non vincolate, nello spazio ordinario  $O(x, y, z)$ , possiede  $3n$  gradi di libertà e lo spazio  $\Sigma$  delle fasi è a  $6n$  dimensioni.

Fissato arbitrariamente il punto  $x^0$  in  $\Sigma^{2s}$  ad esso corrisponde un livello di energia e una traiettoria  $\Gamma$ ; quindi, lo spazio delle fasi subisce, al variare del tempo, una trasformazione in se stesso, diciamola  $T(t)$ , dipendente da  $t$  e queste trasformazioni  $T(t)$  costituiscono esse «semigrupp» nel senso che  $T(t_2) = T(t_1 + t_2)$  (ritenendo che il prodotto di due trasformazioni sia concepito, come è consuetudine, in quella trasformazione che si ottiene operando con la seconda sul risultato a cui conduce la prima).

Consideriamo un insieme  $M$  di punti di  $\Sigma^{2s}$  e si concepisca come un insieme  $M(t_0)$  di posizioni iniziali  $x^0$ ; al tempo  $t$  esso sarà venuto in una nuova posizione  $M(t)$ ; ebbene, un classico teorema di LIOUVILLE ci garantisce che la misura di  $M(t)$  è uguale a quella di  $M(t_0)$ ; cioè la trasformazione  $T(t)$  di  $\Sigma^{2s}$  in se stesso conserva la misura. Inoltre  $T(t)$  fa scorrere ogni punto  $x(t)$  sulla varietà  $H = \text{cost.}$  passante per il punto stesso. In qual modo sarà possibile fruire di questa immagine del movimento del sistema per trarre informazioni, specialmente quando si tratti di un gran numero di gradi di libertà e di un lungo intervallo di tempo?

Nella seconda metà dell'800, per opera principalmente di J. CL.

MAXWELL e L. BOLTZMANN, si sviluppò la Teoria cinetica dei gas nella quale il gas è trattato come un sistema costituito di un numero enorme di particelle (molecole) in movimento: questa teoria si valse dei concetti dell'Analisi aleatoria e J. W. GIBBS (1901) seguendo le idee dei due autori citati pose i fondamenti della Meccanica statistica per darle un assetto soddisfacente come corpo di dottrina costituente la base teorica di alcune teorie fisiche, fra le quali anche la termodinamica.

Secondo questa nuova veduta, lo studio di un singolo sistema attraverso la sua storia lungo il tempo (la traiettoria  $\Gamma$ ), obiettivo irraggiungibile, viene sostituito dalla ricerca di proprietà valide per «quasi tutte» le traiettorie  $\Gamma$  (per esempio, assegnata una configurazione  $x^*$ , la ricerca della probabilità che, in un determinato intervallo di tempo, il sistema passi per configurazioni  $x(t)$  «prossime» a  $x^*$ ).

La successiva introduzione della misura secondo BOREL e secondo LEBESGUE degli insiemi di punti, dell'integrale secondo LEBESGUE e dell'Analisi funzionale a sostegno dell'Analisi aleatoria, ha reso la Meccanica statistica uno strumento essenziale per la Fisica matematica e anche per la Fisica teorica: anzi, per quest'ultimo scopo la Meccanica statistica ha assunto anche la forma quantistica.

Noi resteremo nell'ambito della Meccanica statistica classica e prepareremo la nostra intuizione ad afferrarne qualche concetto esaminando due semplicissimi modelli forniti dalla Teoria dei Numeri<sup>(10)</sup>.

Fissiamo una circonferenza di lunghezza 1 e, scelto un numero reale  $\lambda$  positivo fissiamo sull'asse delle ascisse la successione di punti equidistanti  $k\lambda$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Avvolgiamo sulla circonferenza l'asse delle ascisse, partendo da un punto origine degli archi sulla circonferenza (come se si trattasse di un filo sottilissimo caricato di nodi piccolissimi posti nei punti  $k\lambda$ ) e domandiamoci: che cosa si può dire della distribuzione dei nodi  $k\lambda$  su questa circonferenza? Se  $\lambda$  è un numero razionale ( $\lambda = p/q$ ,  $p$  e  $q$  primi fra loro) si comprende facilmente che (essendo  $(kp + nq)/q = kp/q + n$ ) quando si parte dal nodo 0, tutti i rimanenti nodi stanno sui vertici di un poligono regolare di  $q$  lati iscritto nella data circonferenza. Il caso più interessante si presenta quando  $\lambda$  è irrazionale ( $q\lambda - p \neq 0$  per ogni coppia  $p, q$ ); allora non accade mai che un nodo  $k_2 \lambda$  si sovrapp-

<sup>(10)</sup> Vedasi H. WEYL, *Sur une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et la théorie des perturbations*, L'Enseignement Mathématique, 16 (1914), pp. 455-467.

ponga a un altro nodo  $k_1 \lambda$  (da  $k_2 \neq k_1$  segue  $(k_2 - k_1) \lambda \neq n$  per ogni  $k_1, k_2, n$ ): come risulteranno distribuiti i nodi sulla circonferenza? Ebbene si dimostrano le seguenti proprietà:

1°) L'insieme dei nodi si va addensando su tutta la circonferenza (nel senso che: fissato un qualunque arco  $(\gamma)$ , per quanto piccolo, il numero  $\nu(\gamma, n)$  di nodi  $k\lambda$ , con  $0 \leq k \leq n$ , che in esso cadono cresce indefinitamente al crescere indefinitamente di  $n$ ).

2°) L'insieme dei nodi risulta « equidistribuito » su tutta la circonferenza (nel senso che: il rapporto  $\nu(\gamma, n)/n$  tende alla lunghezza  $\gamma$  di  $(\gamma)$  al crescere indefinitamente di  $n$ ; cioè  $\nu(\gamma, n)/n - \gamma \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ ).

3°) Come si comporta lo scarto  $\nu(\gamma, n)/n - \gamma$ ; cioè, quale è una funzione (tendente a zero) che maggiore lo scarto stesso? La risposta a questo quesito fa appello alle proprietà aritmetiche di  $\lambda$ , e precisamente alla successione delle frazioni  $p/q$  che, fra tutte le frazioni di denominatore  $\leq q$ , danno del numero  $\lambda$  la migliore approssimazione. Questa migliore approssimazione si costruisce con un algoritmo classico (quello delle cosiddette « frazioni continue ») che sotto l'aspetto essenziale risale all'algoritmo euclideo.

Non è possibile qui fermarci a precisare la maggiorazione segnalata in 3°): ci basti riflettere un istante sui semplici contenuti di tutte e tre le proprietà che sono disposti, per dir così, « a gradinata ».

Una interpretazione geometrica delle proprietà enunciate si ottiene considerando sul piano cartesiano  $O(x, y)$  il reticolato, a maglie quadrate di lato 1, costituito dai due sistemi di rette  $x = h$ ,  $y = k$  ( $h, k$  numeri interi  $>, =, < 0$ ) (vedi fig. 26).

Consideriamo uno dei quadrati (per es.  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ) come un biliardo quadrato sulle cui sponde (i quattro lati) si rifletta elasticamente una biliarda lanciata da una posizione iniziale  $(x_0, y_0)$  con una velocità  $v = (a, b)$  e il cui movimento avvenga senza dissipazione. Se l'angolo di inclinazione del lancio ha la tangente  $\lambda = b/a$  razionale la traiettoria della biliarda si chiude, nel senso che essa segue un circuito chiuso ripetuto infinite volte; se l'angolo di inclinazione ha la tangente  $\lambda = b/a$  numero irrazionale allora la traiettoria non si chiuderà mai e si verificano le seguenti proprietà:

1°) La traiettoria è densa su tutto il quadrato (nel senso che fissato arbitrariamente un punto del quadrato, in ogni suo intorno, per quanto piccolo, la traiettoria della biliarda vi passa infinite volte).

2°) Fissato un campo  $(A)$  di area  $A$  interno al quadrato, la traiettoria vi penetra infinite volte (secondo le quattro orientazioni

definite da  $(a, b)$ ,  $(-a, b)$ ,  $(-a, -b)$ ,  $(a, -b)$ , cioè verso *NE*, verso *NW*, ecc.). Consideriamo un tratto di lunghezza  $l$  della traiettoria, corrispondente all'intervallo di tempo  $0 \leq t \leq T$ ; allora, la somma  $s$  delle lunghezze dei segmenti di quel tratto che stanno entro il campo  $(A)$  è approssimativamente  $4Al$ ; cioè  $s/l \rightarrow 4A$  per  $l \rightarrow +\infty$  (Si osservi che il quadrato ha area 1). Diciamo  $\tau(T, A)$  il « tempo di soggiorno » della biliarda nel campo  $(A)$  durante l'intervallo di tempo  $0 \leq t \leq T$ ; allora, il tempo di soggiorno medio in  $(A)$ , cioè il rapporto  $\tau(T, A)/T$  tende a  $4A$  al crescere indefinitamente di  $T$ .

Qual'è la probabilità che, nell'intervallo di tempo  $0 \leq t \leq T$ , la biliarda si trovi entro il campo  $(A)$ ? Questa probabilità si esprime sia col rapporto  $s/l$  che col tempo di soggiorno medio  $\tau/T$  e ambedue

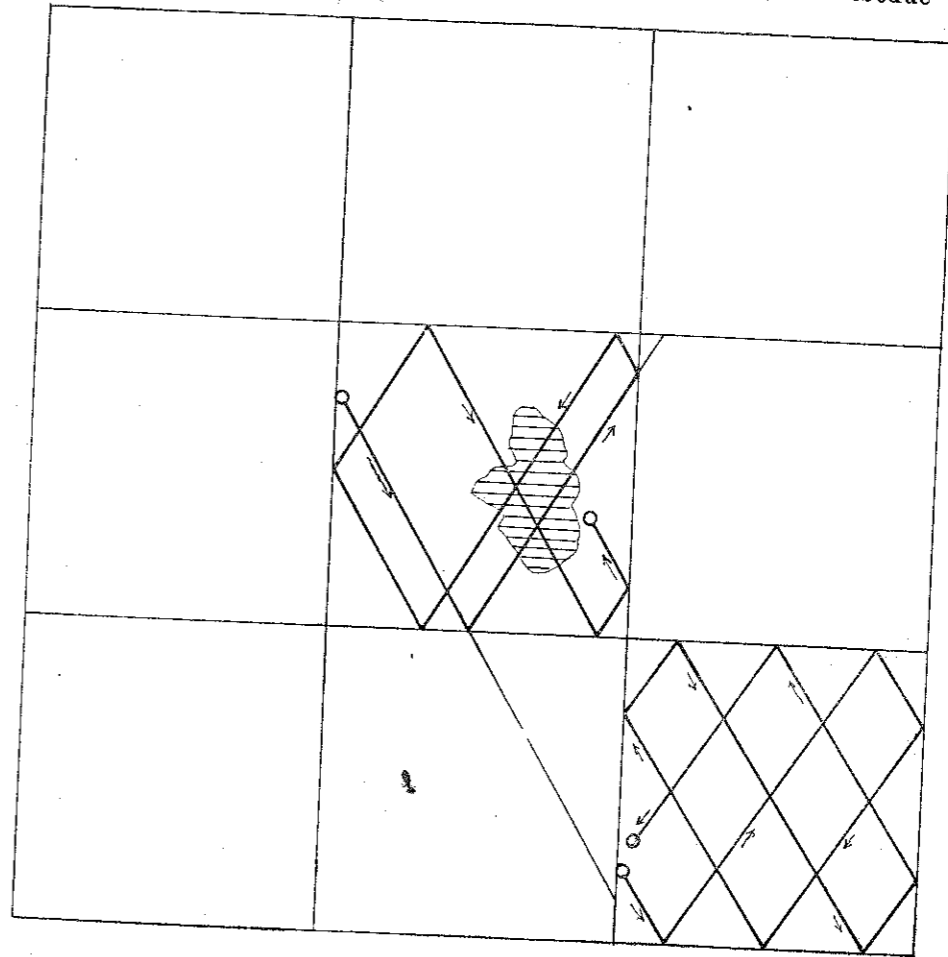


fig. 26



questi rapporti tendono ad approssimare l'area  $4A$ . Dunque, una probabilità di soggiorno in un campo si esprime mediante un tempo di soggiorno medio nel campo e anche mediante il quadruplo dell'area del campo stesso. Campi di eguale area hanno, alla lunga, eguale tempo di soggiorno. Insistiamo: il soggiorno medio può essere misurato sia lungo l'asse del tempo che mediante l'area del campo piano corrispondente.

(Come si approssima  $\tau/T$  al numero  $4A$ ? Si veda l'osservazione 3<sup>o</sup>) precedente; ci persuadiamo che la rapidità dipende, oltre che dal campo ( $A$ ), in modo essenziale, dalla natura aritmetica del numero irrazionale  $b/a$ .

Nel caso in cui  $b/a$  sia razionale e quindi la traiettoria sia chiusa, le considerazioni precedenti non sono più valide. Tuttavia, fissato su di essa un « tratto di soggiorno », si ottiene in modo ovvio una relazione semplice fra il tempo di soggiorno medio su quel tratto e la lunghezza del circuito chiuso.

Le proprietà del sistema meccanico molto elementare qui considerato trovano applicazione nello studio delle perturbazioni nella Meccanica celeste, precisamente nel caso di tre pianeti (P. BOHL), e, opportunamente esteso con l'analoga suddivisione dello spazio ordinario o a più dimensioni in celle cubiche, anche al caso di quattro o più pianeti (H. WEYL). (Si tratta dello spostamento medio del perielio e del nodo ascendente).

Ritorniamo al sistema meccanico generale e alla rappresentazione del suo movimento nello « spazio delle fasi »  $\Sigma^{2s}$  di GIBBS. In questo spazio è contenuto un sistema semplicemente infinito di varietà (ipersuperficie)  $H=c$  ottenuto al variare di  $c$ ; tali varietà non hanno a due a due alcun punto in comune e preso un qualunque punto  $x$  su una di esse, la traiettoria  $\Gamma$  si svolge sulla varietà stessa. Fissati arbitrariamente su una varietà  $H=c$  un punto iniziale  $x^0$  e un altro punto  $x^*$  potrà valere la proprietà che la traiettoria per  $x^0$  passi nel futuro in prossimità di  $x^*$  e tanto prossima quanto si vuole; ancora di più, scelti arbitrariamente sulla varietà due campi parziali di eguale misura, a  $2s-1$  dimensioni, potrà sussistere l'ulteriore proprietà che il tempo medio di soggiorno del punto  $x(t)$  corrente su  $\Gamma$  sia asintoticamente lo stesso per ciascuno dei due campi (appunto perchè essi hanno eguale misura). Ebbene, nella Meccanica statistica è fondamentale l'ipotesi che nel sistema considerato, per quasi tutte le traiettorie siano valide le due proprietà suddette. Il modello sopra presentato della biliarda lanciata nel biliardo quadrato è il più semplice sistema nel

quale l'ipotesi ergodica è verificata, almeno per quanto riguarda le due coordinate di posizione. (Si osservi che la velocità è discontinua ed assume quattro valori isolati).

Il movimento naturale dello spazio delle fasi in sé (immagine del moto del sistema) conduce il punto  $x^0$  che si trova in questa posizione all'istante  $t=0$  in un punto univocamente determinato  $x(t)$  all'istante  $t$ : pertanto se  $f(x)$  è una funzione definita nei punti  $x$  dello spazio  $\Sigma^{2s}$  delle fasi, potremo concepire  $f(x(t)) = f(x^0, t)$  come funzione della posizione iniziale  $x^0$  e del tempo  $t$ . Lasciando  $x^0$  generico denotiamolo con  $x$ ; allora siamo in presenza di una funzione  $f(x, t)$  definita nello spazio  $\Sigma^{2s} \times T$  ( $T$  asse del tempo  $-\infty < t < +\infty$ ) a  $2s+1$  dimensioni: quali particolarità presenta questa funzione di  $(x, t)$  per essere stata costruita con la definizione arbitraria in  $\Sigma^{2s}$  e poi prolungata in  $\Sigma^{2s+1} = \Sigma^{2s} \times T$  mediante l'andamento imposto, su ogni sezione  $t = \text{cost}$ , dal movimento naturale del sistema meccanico? La costruzione di  $f(x, t)$  ci fa presentire che questa funzione non è la più generale definibile in  $\Sigma^{2s} \times T$ .

Prima di rispondere a questa domanda osserviamo che nel movimento di  $\Sigma^{2s}$  in sé (guidato dal sistema) può avvenire che un sottospazio  $X$  sia « invariante » (cioè si muova anche lui in sé: per questo occorre e basta che insieme ad un punto  $x$  contenga tutta la traiettoria  $\Gamma$  per  $x$ ); può anche avvenire che  $X$  sia, oltre che invariante, anche « metricamente indecomponibile » (cioè non si possa ripartire nell'unione  $X = X_1 \cup X_2$  di due insiemi disgiunti, invarianti e di misura positiva). Siamo in grado adesso di rispondere alla domanda posta segnalando una proprietà fondamentale (J. von NEUMANN, G. BIRKHOFF, 1931) della funzione  $f(x, t)$ :

Sia  $X$  uno spazio invariante, metricamente indecomponibile, misurabile secondo BOREL e di misura positiva;  $f(x)$  sia una funzione sommabile in  $X$  (cioè integrabile con integrale finito) della quale diciamo  $\bar{f}$  la media (aritmetica) su  $X$ , cioè sia

$$\bar{f} = \frac{1}{mX} \int_X f(x) dx.$$

Allora, quasi ovunque in  $X$ , esiste il limite

$$\lim_{U \rightarrow +\infty} \int_0^U f(x, t) dt = f^*(x)$$

ed è quasi ovunque costante e uguale a  $\bar{f}$  (cioè  $f^*(x) \doteq \bar{f}$ ) (La media temporale è costante e quasi ovunque uguale alla media nello spazio delle fasi; quasi ovunque significa, a meno di eventuali punti  $x$  costituenti al più un insieme parziale di misura nulla. Si rifletta sui modelli elementari: i numeri  $x$  razionali costituiscono un insieme di misura nulla!). Questa è la proprietà fondamentale della funzione  $f(x, t)$  che avevamo in vista: in forza di questa, l'ipotesi ergodica è ricondotta all'ipotesi che ogni varietà  $H = c$  (di energia costante) sia *metricamente indecomponibile*.

Le considerazioni da noi svolte sul sistema meccanico rimangono nell'ambito della « Dinamica generale »; ma la sistemazione dell'ipotesi ergodica nell'ambito della Meccanica statistica richiede l'introduzione della teoria delle probabilità e, in particolare, l'uso del cosiddetto « teorema limite centrale ». Infatti, la Meccanica statistica tratta i sistemi con un grandissimo numero di gradi di libertà la cui struttura si presta ai metodi di quella teoria: in particolare si può fare uso delle formule asintotiche che esprimono la media nello spazio delle fasi con un'approssimazione della quale si può maggiore lo scarto.

Come abbiamo già detto, la Meccanica statistica si estende con analogia anche alla Meccanica quantistica; questa estensione si vale dell'Analisi funzionale e specialmente di quella legata ai cosiddetti « spazi di HILBERT »: possiamo dire soltanto che l'analogo del vettore  $\alpha$  dello spazio delle fasi di GIBBS viene costruito mediante la considerazione di operatori autoaggiunti e di insiemi di autovalori: la misura (che è continua nello spazio classico  $\Sigma^{2n}$  di GIBBS) è sostituita da una misura discontinua « discreta » collegata alla distribuzione degli autovalori stessi.

Lo sviluppo imponente della Fisica matematica e della Fisica teorica, e le loro applicazioni durante l'ultimo mezzo secolo ci fanno apprezzare l'importanza del concetto di ergodicità, sommariamente illustrato in questa parte del discorso; esso è uno dei numerosi pilastri sui quali poggia la imponente costruzione.

#### Ancora sull'Analisi infinitesimale.

All'inizio del mio discorso ho presentato in modo molto sommario qualche carattere dell'Analisi infinitesimale, richiamando l'attenzione sull'interesse delle configurazioni stazionarie di un sistema in movimento e sulla rappresentazione analitica (rappresentazione

« locale » e rappresentazione « in grande ») del movimento stesso. Adesso riprendiamo quelle considerazioni per precisare alcuni concetti riguardanti l'andamento delle funzioni di più variabili e in particolare il concetto di differenziabilità.

Sia  $z = f(x, y)$  una funzione delle due variabili  $x, y$  e, riferito il piano a un sistema cartesiano ortogonale  $O(x, y)$ , consideriamo la rappresentazione geometrica di  $z = f(x, y)$  mediante il sistema delle linee di livello  $f(x, y) = \text{costante}$  (vedi fig. 27 e 28). Fissiamo sul piano un campo  $T$ , di cui diciamo  $T^*$  la frontiera (o contorno) e  $\bar{T}$  la chiu-

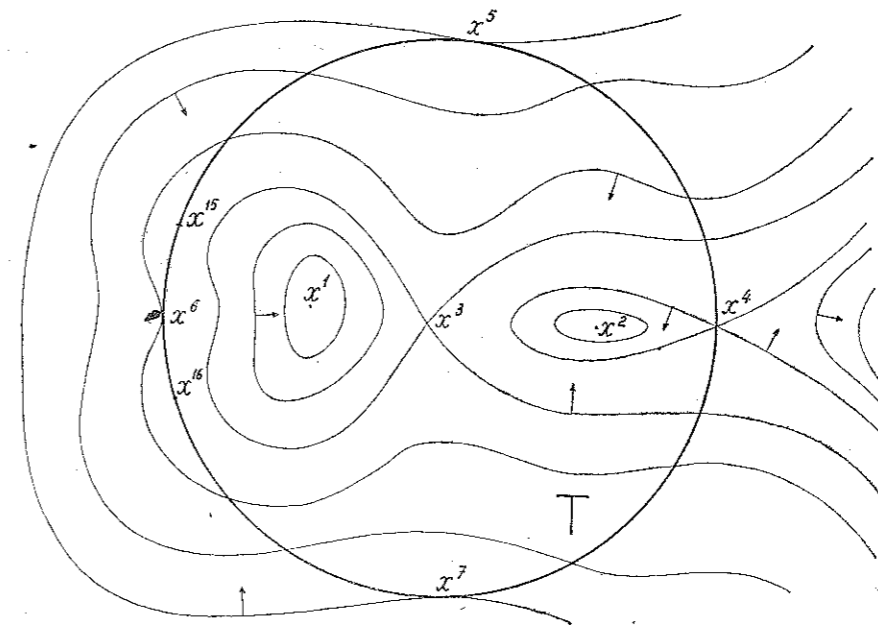


fig. 27

sura, cioè l'insieme che risulta dall'unione di  $T$  e della sua frontiera  $T^*$ . ( $T$  è l'interno di un cerchio e  $T^*$  la sua circonferenza nella fig. 27;  $T$  è l'interno di un rettangolo e  $T^*$  il suo contorno nella fig. 28).

Ha interesse l'andamento di  $f(x, y)$  in  $\bar{T}$  (compresa la frontiera  $T^*$ ) e anche l'andamento della funzione  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  si pensi variabile vincolato lungo la frontiera  $T^*$ . Pensiamo che  $f(x, y)$  sia continua, con le sue derivate parziali prime e seconde, anch'esse tutte continue: è una « smussatezza » riposante per la nostra intuizione che può concepire così la superficie  $S$  rappresentativa di



$f(x, y)$  (la grafica) fornita di piano tangente in ogni punto: di più, nell'intorno di ogni punto, cioè « localmente », il pezzetto della superficie  $S$  si attegna approssimativamente come un pezzetto di quadrica (ellissoide, iperboloide, paraboloido, eventualmente con fuori del vertice o cilindro ecc.). Interessano di solito: i punti interni o di frontiera nei quali  $f(x, y)$  ha « valore stazionario » su  $\bar{T}$  (per es.  $x^1, x^2, x^3, x^4$  nella fig. 27 e nella fig. 28); i punti in cui la funzione  $f(x, y)$  ha valore stazionario quando  $(x, y)$  sia vincolato lungo la frontiera  $T^*$  (per es.  $x^4, x^5, x^6, x^7, x^{13}, x^{16}$  nella fig. 27;

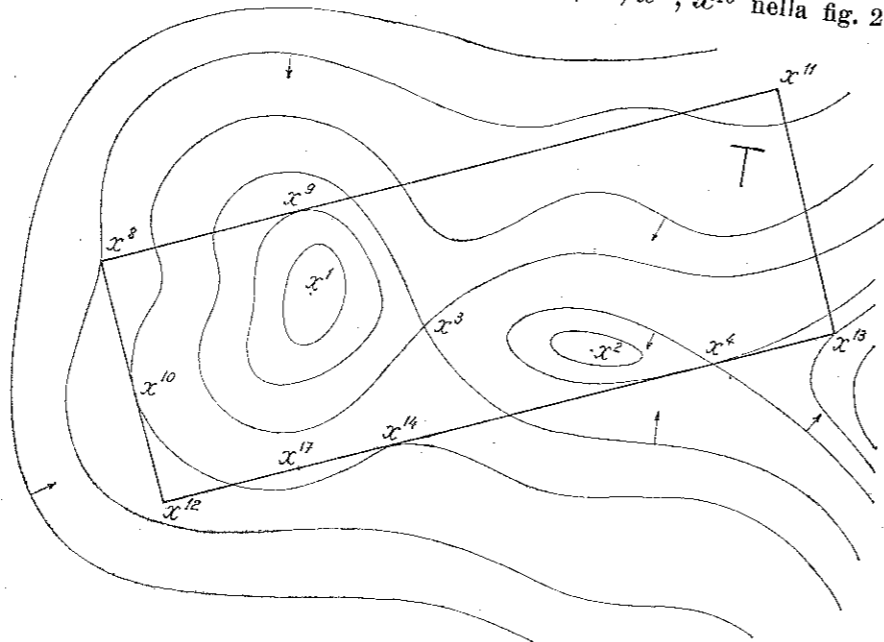


fig. 28

$x^9, x^{10}, x^{14}, x^{17}$  nella fig. 28. Si osservi che  $x^4$  è stazionario anche in  $\bar{T}$  mentre tutti gli altri non lo sono). Il punto  $(x, y)$  a valore stazionario è un concetto « locale » in  $\bar{T}$  o lungo  $T^*$ . Interessano « i punti estremanti » cioè i punti in cui  $f(x, y)$  assume valore « estremo » (massimo o minimo) nell'insieme  $\bar{T}$  o lungo  $T^*$ : questo concetto di punto estremante può concepirsi come « locale » (valido per un conveniente intorno) oppure come « globale » (valido su tutto  $\bar{T}$  (o su tutto  $T^*$ ), (per es.  $x^1$  e  $x^2$  estremanti locali in  $\bar{T}$  nella fig. 27 e nella fig. 28;  $x^1$  è anche globale in  $\bar{T}$  idem;

$x^3$  e  $x^4$  non sono estremanti in  $\bar{T}$ ;  $x^4, x^5, x^{15}, x^6, x^{16}, x^7$  della fig. 27 sono estremanti locali lungo  $T^*$ ;  $x^5$  e  $x^7$  sono minimi globali lungo  $T^*$  e  $x^4$  è massimo globale lungo  $T^*$ ; analogamente, nella fig. 28 troviamo per es. che  $x^4$  è punto a valore stazionario sia su  $\bar{T}$  che lungo  $T^*$ ;  $x^4$  è estremaute locale lungo  $T^*$  mentre non è estremante in  $\bar{T}$ ;  $x^{13}$  non è a valore stazionario nè su  $\bar{T}$  nè su  $T^*$  ma è punto estremante (massimo) locale e globale sia su  $T$  che su  $T^*$  ecc.). Osserviamo che si possono presentare punti estremanti lungo  $T^*$  che non sono estremanti in  $\bar{T}$  (per es.  $x^9$  fig. 28); punti estremanti in  $\bar{T}$  che non sono a valore stazionario (per es.  $x^6$  fig. 27,  $x^8$  fig. 28).

La ricerca dei punti estremanti e dei valori estremi di  $f(x, y)$  è un problema classico dell'Analisi infinitesimale. È anche classico, ma molto più complicato, il problema della ricerca dei valori estremi di una quantità variabile che dipende da una linea o da una superficie ecc. (cioè come se si trattasse di una funzione anzichè di due o più variabili, di infinite variabili indipendenti!): esso costituisce l'oggetto del Calcolo delle variazioni, sorto con l'opera di BERNOULLI e di EULERO; ma su questo dobbiamo sorvolare e diremo soltanto che, in tale Calcolo, prendono ancora maggior rilievo e importanza le distinzioni analoghe a quelle precedentemente accennate.

Per una funzione smussata come la nostra, la ricerca degli estremi locali all'interno di  $T$  si compie scegliendoli fra quelli a valore stazionario. La ricerca degli estremi locali in  $\bar{T}$  che stanno sulla frontiera  $T^*$  si compie scegliendoli fra gli estremi locali della  $f(x, y)$  con  $(x, y)$  vincolato lungo  $T^*$ : quando  $T^*$  sia esprimibile mediante una equazione  $\varphi(x, y) = 0$  con la  $\varphi(x, y)$  convenientemente smussata (per esempio la circonferenza  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0$ ) gli estremi locali lungo  $T^*$  si ricercano col « metodo dei moltiplicatori » di LAGRANGE (nel nostro caso si considera la funzione ausiliaria  $f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ ,  $\lambda$  parametro moltiplicatore). Come abbiamo detto, fra gli estremi locali lungo  $T^*$  si scelgono gli estremi locali in  $\bar{T}$  appartenenti a  $T^*$ . Quando la frontiera  $T^*$  di  $T$  non sia esprimibile mediante una equazione smussata, come per es. nel caso di  $T$  rettangolo (fig. 28), ma risulti dall'unione di più pezzi ciascuno smussato (nell'esempio di fig. 28 figurano i quattro lati ciascuno dei quali è dato da una equazione lineare) per ciascuno di tali pezzi si può applicare il metodo di LAGRANGE e poi limitarlo all'arco; di più si devono prendere in esame i vertici che sono le intersezioni di saldatura dei pezzi smussati del contorno.

Se le variabili indipendenti fossero per esempio quattro  $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , la frontiera di  $T$  sarebbe una varietà a tre dimensioni; se costituita di pezzi smussati questi si salderebbero lungo pezzi di varietà a due dimensioni, e queste alla loro volta si salderebbero lungo linee ecc.; si intravede il metodo di LAGRANGE precedente per pezzi e in una « discesa » lungo il diminuire delle dimensioni; in ogni fase il pezzo di frontiera ha, a sua volta, una frontiera ecc. (il vertice nel caso rudimentale del rettangolo!) che deve essere studiata.

Può anche darsi che  $z = f(x, y)$  sia definita da una relazione di « interdipendenza » fra le tre variabili  $x, y, z$ ; cioè mediante un'equazione  $F(x, y, z) = 0$  che le impegna tutte e tre senza che ve ne sia una come privilegiata. Ebbene, in questo caso, quando siano soddisfatte certe condizioni (fra le quali è da notare quella che sia  $\partial F/\partial z \neq 0$ ), si possono ricavare una o più funzioni  $z = f(x, y)$  ciascuna delle quali si dice « definita implicitamente » dall'equazione  $F(x, y, z) = 0$ . (Per esempio  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$  consente di ricavarle

$$z_1 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

definite nel cerchio  $\bar{T} \equiv (x^2 + y^2 \leq R^2)$  alla cui circonferenza le derivate parziali di  $z_1$  (come quelle di  $z_2$ ) diventano infinite. Si potrebbero fare considerazioni analoghe per la coppia di funzioni  $u = \varphi(x, y, z)$ ,  $v = \psi(x, y, z)$  definite da una coppia di equazioni  $F(x, y, z; u, v) = 0$ ,  $G(x, y, z; u, v) = 0$ .

Tutte queste considerazioni un po' minute, che si seguono bene osservando le fig. 27 e 28, noi le abbiamo svolte allo scopo di preparare l'intuizione a distinguere chiaramente il fenomeno locale dal fenomeno globale, il fenomeno nell'interno del campo dal fenomeno sulla frontiera; il fenomeno nel campo in prossimità della frontiera da quello ottenuto vincolando il punto a variare lungo la frontiera stessa; la legge di interdipendenza fra vari elementi variabili che descrive un fenomeno riguardante un sistema isolato e le esplicitazioni di quella legge, come per distinguere fra cause ed effetti. (Si noti con quale chiara cautela l'Analisi matematica pone le condizioni per superare questa ultima distinzione che fuori del modello matematico presenta difficoltà).

Tutte queste distinzioni, essenziali per l'uso che si vuol fare dello strumento matematico, sono qui rivolte a tale strumento nell'ipotesi che esso si presenti, diciamo così, con classica castigatezza. Quando questa venga a mancare, si possono porre molte domande,

connesse con lo studio di  $f(x, y)$ , rivolte a chiarire premesse di fondo e che, nella maggior parte dei casi, mettono a fuoco tipi di difficoltà che si devono superare. Poniamone qualcuna:

Come è definita la funzione  $f(x, y)$ ? Se essa è data mediante operazioni da eseguire sui numeri  $x, y$  (operazioni in numero finito, oppure sviluppi in serie, rappresentazioni mediante integrali ecc.) la rappresentazione che ne risulta ammette un « campo di esistenza » spontaneo e naturale  $T$ ? Questo accade per esempio per le funzioni analitiche (sviluppabili in serie di TAYLOR): esse sono smussatissime! ammettono derivate finite e continue di qualunque ordine all'interno del loro campo di esistenza  $E$ , ma in prossimità della frontiera  $E^*$  di  $E$  sono, in generale, complicate (in questo caso, assumendo  $\bar{T}$  interno ad  $E$ ,  $f(x, y)$  è prolungabile fuori di  $\bar{T}$ ).

La funzione  $f(x, y)$  è definita soltanto in  $\bar{T}$  o è prolungata anche al di fuori? (Nel caso delle nostre figure 27 e 28, sì).

Ammesso che  $T$  sia un campo come « sovrapposto » alla  $f$  per esplorarla nella zona da esso occupata, la frontiera  $T^*$  di  $T$  fino a qual punto risulta smussata? È possibile applicare i metodi per la determinazione degli estremi in  $\bar{T}$  su  $T^*$ ? Riteniamo per un momento la funzione oggetto  $f(x, y)$  di per sé abbastanza smussata; qual'è la smussatezza critica di  $T^*$  utile per l'applicabilità di tali metodi? L'analogo problema si pone sulle ipotesi di smussatezza per la  $f(x, y)$  all'interno di  $T$  e sulla frontiera  $T^*$ , e là dove la smussatezza difettesse all'interno sorgerebbero punti (magari isolati) da aggiungere come punti di frontiera.

Nell'atteggiamento più generale (svincolato dai tipi di rappresentazione)  $z = f(x, y)$  è una legge che ad ogni  $(x, y)$  appartenente a  $\bar{T}$  fa corrispondere un valore di  $z$  (funzione definita punto per punto!); questa legge potrebbe a priori non essere rappresentabile mediante una espressione analitica e la grafica  $S$  di  $f(x, y)$  potrebbe anche essere lontana dalla intuizione che abbiamo delle comuni superficie; come affrontarne lo studio in questi casi? Può evolversi l'Analisi infinitesimale delle funzioni (per l'andamento, i punti estremanti ecc. in senso sia locale che globale) per adattarsi a questa veduta generale? Si può sostituire alla funzione  $f(x, y)$  un'altra analoga  $\bar{f}(x, y)$  che sia « quasi-ovunque » uguale alla precedente allo scopo di averla più smussata di fronte a quei concetti? Come tarare quel « quasi-ovunque »? Quasi-ovunque nel senso « a meno di un insieme di misura nulla »: occorre una penetrante nozione di « misura » degli insiemi; sarà utile, per quanto è possibile, che la descrizione dei fenomeni passi da una forma nell'infinitesimo a una



forma integrale con una penetrante nozione di integrale: come istituire queste nozioni di misura e di integrale e questi nuovi orientamenti del modello? (La misura secondo PEANO e JORDAN, secondo BOREL e LEBESGUE, l'integrale secondo LEBESGUE, le equazioni integrali, l'Analisi armonica costruita con le medie integrali sono la piattaforma per le risposte).

Supponiamo che  $f(x, y)$  sia una funzione che traduce in una formula una legge per la cui enunciazione vengano utilizzate collezioni di osservazioni empiriche: in qual modo si può fissare una famiglia di funzioni fra le quali scegliere la  $f(x, y)$  che meglio di ogni altra si adatta a quelle collezioni? E, fissata la famiglia, come scegliere  $f(x, y)$  nella famiglia stessa? L'adattamento si dovrà richiedere come maggiorazione di uno « scarto » o come media di uno « scarto »? Come scegliere tale criterio? Se come media, in qual modo ponderata? (Il problema dell'interpolazione risponde a queste domande). Seguendo queste vedute, quali accorgimenti si dovranno seguire affinché un fenomeno locale non risulti perduto o mascherato dallo schema  $f(x, y)$  e, al contrario, per evitare che sorgano in  $f(x, y)$  fenomeni locali fittizi? Quali accorgimenti si dovranno seguire per delineare la frontiera  $T^*$  del campo  $T$  di validità dello schema costruito? Quali gli accorgimenti perchè l'approssimazione alla frontiera non faccia perdere allo schema i suoi buoni caratteri di rappresentazione?

Una questione di altra natura: lo schema fornito dall'Analisi matematica è concettualmente chiaro anche se la tecnica da seguire per il suo trattamento è complicata; fino a qual punto è possibile l'esecuzione pratica dei calcoli che tale schema richiede per fornirci le informazioni che desideriamo? (Le macchine calcolatrici e gli elaboratori elettronici veloci hanno influito notevolmente sull'inquadramento del problema qui ultimo ricordato).

Per porre una domanda di carattere generale ma meno preciso: come e a qual punto stabilire una « saldatura » fra l'Analisi infinitesimale e la « Matematica del finito », Matematica che è la sola, alla resa dei conti, con cui l'uomo ha a che fare?

È una serie di domande sostanziose: non vorrei che l'averle qui enunciate generasse un senso di smarrimento; prego di volerle accogliere come un mio monologo interiore che ha il solo scopo di far sentire in qual modo la Scienza matematica, lungi dall'essere statica, si presenti invece in un florido divenire.

Le domande qui poste fanno intravedere alcune direttrici lungo le quali si è rivolto il pensiero matematico, specialmente a partire

dalla fase di critica, quando ha incominciato a notomizzare se stesso. Questa fase, iniziata ai primi dell'800, continua tuttora con le risposte a domande di cui quelle enunciate costituiscono tipi semplici e primordiali: continua, come la corrente di un grande fiume tumultuoso che, accanto a filoni ampi e chiari, comporta turbolenze di esasperazione. E questo paragone non vuole essere affatto negativo: volgendo indietro nel tempo, possiamo scorgere storicamente degli atteggiamenti, ritenuti esasperati dai contemporanei, che furono germi di ampi fruttuosi sviluppi.

Ritorniamo con la mente al modello « castigato » (figure 27 e 28) che fornisce immagini semplici e intuitive. Ci proponiamo di precisare il concetto di differenziabilità delle funzioni di due o più variabili: faremo questo pensando agli spazi a  $n$  dimensioni perchè saremo condotti a formule semplici, grazie alle nozioni di « vettore » e di « matrice » che oggi sono di uso corrente nella Matematica.

Lo studio della geometria negli spazi a  $n$  dimensioni pone la nozione di « punto » o « vettore » come  $n$ -upla ordinata di numeri (vettore a  $n$  componenti o coordinate: diciamo  $n$ -vettore)

$$x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

si istituiscono le due operazioni che danno il prodotto  $\alpha \cdot x$  di un numero  $\alpha$  per il vettore  $x$  e la somma  $x + y$  di due vettori  $x$  e  $y$

$$\alpha \cdot x = x \cdot \alpha = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \quad x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

(esse possiedono le semplici proprietà formali ben note); si definisce il « vettore nullo »  $0 \equiv (0, \dots, 0)$  e il riferimento nello spazio  $(e^1, e^2, \dots, e^n)$  costituito dalla  $n$ -upla dei « vettori fondamentali » ( $e^1 \equiv (1, 0, \dots, 0), \dots, e^n \equiv (0, 0, \dots, 1)$ ).

Un insieme di  $n$ -uple così organizzato si dice « spazio vettoriale lineare a  $n$  dimensioni »: le componenti  $x_k$  sono numeri di un certo campo numerico; per esempio il campo reale  $R$  o il campo complesso  $C$ . Per semplificare la nostra esposizione considereremo  $x$  vettore a  $n$  componenti reali.

Nello spazio lineare si può introdurre la nozione di « prodotto interno » dei due vettori  $x$  e  $y$  come il numero

$$x \cdot y = (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

e, in accordo con questa, la « norma »  $\|x\|$  del vettore  $x$  e la

« distanza »  $\|x - y\|$  dei due vettori  $x$  e  $y$

$$\|x\| = (x \cdot x)^{1/2} = \left(\sum_1^n x_h^2\right)^{1/2}, \|x - y\| = \left\{\sum_1^n (x_h - y_h)^2\right\}^{1/2}.$$

Scriviamo  $x \geq 0$  per intendere  $x_h \geq 0$  ( $h = 1, \dots, n$ ), e  $x > 0$  per intendere  $x_h \geq 0$  ( $h = 1, \dots, n$ ) e per almeno un valore di  $h$  vale  $>$ . I due vettori  $x$  e  $y$  si diranno « ortogonali » quando  $(x, y) = 0$ .

Come esempi pensiamo allo spazio del vettore  $p \equiv (p_1, \dots, p_n)$  dei prezzi e del vettore  $q \equiv (q_1, \dots, q_n)$  delle quantità e al prodotto  $p \cdot q = (p, q) = \sum p_h q_h$  che si incontrano nell'Economia matematica.

Il passaggio dal vettore  $x$  di  $R^n$  al vettore  $y$  di  $R^m$  dato dal sistema di relazioni

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

che si abbrevia con la notazione

$$y = Ax$$

è una « applicazione » di  $R^n$  su  $R^m$  (eventualmente di  $R^n$  su se stesso) che si dice « trasformazione lineare » ( $A(x) = \alpha \cdot Ax$ ,  $A(x^1 + x^2) = Ax^1 + Ax^2$ ) ed è caratterizzata dal quadro dei coefficienti

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{hk}) \quad \begin{cases} h = 1, 2, \dots, m \\ k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

che si chiama « matrice di tipo  $(m, n)$  ».

Le matrici (tabelle di numeri) si presentano spontaneamente nella Matematica: una situazione tipica è quella segnalata sopra dalle trasformazioni lineari (fra queste si trovano per esempio le omotetie, le dilatazioni lungo i versori fondamentali, le rotazioni ecc.) e da questo punto di vista sembra che la matrice fornisca la base per una nuova e più ampia intuizione geometrico-spaziale connessa a un formalismo, e di natura ben lontana da quella di cui sempre si è parlato nella geometria classica. Le matrici si pre-

sentano anche nell'Economia matematica (per es. Modello Input-Output di LEONTIEV); nella Teoria delle probabilità come « matrici di transizione »; nelle cosiddette « catene di MARKOV »; nella Programmazione lineare; nella Teoria dei giochi ecc. Aggiungiamo che nell'Analisi funzionale si presentano vettori con una successione di infinite componenti e matrici infinite nelle quali il quadro è illimitato.

Sia  $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (numero reale  $y$  funzione dell' $n$ -vettore  $x$ ) definita in un campo  $T$  del quale  $x^0$  sia punto interno; consideriamo accanto a  $x^0$  (punto iniziale) il punto  $x^0 + \Delta x$  (punto variato) interno a  $T$ , ottenuto con l'incremento  $\Delta x$  dal vettore  $x^0$ . La funzione  $f(x)$  si dice « differenziabile nel punto  $x^0$  » quando esiste un vettore  $p^0 \equiv (p_1^0, \dots, p_n^0)$  indipendente da  $\Delta x$  tale che l'incremento  $\Delta y$  di  $y$  relativo al passaggio dal punto  $x^0$  al punto  $x^0 + \Delta x$ , cioè

$$\Delta y = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0),$$

si esprime mediante la formula

$$\Delta y = p^0 \cdot \Delta x + r_2(\Delta x)$$

nella quale  $r_2(\Delta x)$ , dipendente in generale da  $\Delta x$ , è infinitesimo insieme a  $\Delta x$  e tale che  $r_2/\|\Delta x\| \rightarrow 0$  per  $\Delta x \rightarrow 0$ . Il prodotto  $df = p^0 \cdot \Delta x$  si dice differenziale di  $y$  (o di  $f(x)$ ) attinente al passaggio da  $x^0$  a  $x^0 + \Delta x$ ; il vettore  $p^0$  le cui componenti  $p_h^0 = (\partial f / \partial x_h)_0$  sono le derivate parziali finite della  $f$  rispetto alle singole variabili, generalizza la nozione di derivata finita: la differenziabilità implica un certo comportamento locale di  $f(x)$  in  $x^0$  (che è verificato per esempio quando  $p$  esista continuo in un intorno di  $x^0$ ). Questo è un primo tipo di smussatezza per la funzione  $f$ ; in  $(x^0, y)$  la grafica di  $f(x)$  ammette la varietà lineare  $n$ -dimensionale tangente (iperpiano tangente). I punti  $x^0$  a valore stazionario sono quelli in cui  $f(x)$  è differenziabile e inoltre  $df = 0$  cioè  $p^0 = 0$ .

Il differenziale secondo di  $y$  risulta dall'analisi del termine  $r_2(\Delta x)$  della formula precedente: si dice che  $y = f(x)$  ammette differenziale secondo in  $x^0$  quando (oltre ad esistere il differenziale primo  $df$ ) vale la rappresentazione:

$$\Delta y = p^0 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} Q^0(\Delta x, \Delta x) + r_3(\Delta x)$$

dove  $r_3/\|\Delta x\|^2 \rightarrow 0$  per  $\Delta x \rightarrow 0$  e il termine di 2° ordine  $Q^0(\Delta x, \Delta x)$  è una forma quadratica  $\sum q_{hk}^0 \Delta x_h \Delta x_k$  i cui coefficienti



(costituenti una  $(n, n)$ -matrice simmetrica  $Q^0$ ) sono le derivate seconde finite di  $f(x)$  nel punto  $x^0$  (necessariamente esistenti)

$$q_{hk}^0 = q_{kh}^0 = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} \right)_0.$$

Il differenziale secondo di  $f(x)$  risulta allora per definizione

$$d^2y = d^2f = Q_0(\Delta x, \Delta x) = \sum q_{hk}^0 \Delta x_h \Delta x_k.$$

L'esistenza del differenziale secondo in  $x^0$  implica un certo comportamento di  $f(x)$  nell'intorno di  $x^0$ , che ne assicura una ulteriore e più accentuata smussatezza nei confronti di quella imposta dall'esistenza di  $df$ .

La ricerca dei punti  $x^*$  estremanti di  $f(x)$  si compie ricercando i punti  $x^0$  a valore  $f(x^0)$  stazionario e scegliendo, fra questi, quei punti  $x^*$  nei quali la forma  $Q^0$  ha certi caratteri che qui non stiano a dire: questo metodo vale nei casi più comuni, perchè potrebbe darsi che l'esame del differenziale secondo  $d^2f = Q^0(\Delta x, \Delta x)$  non sia sufficiente e sia necessario l'esame diretto di  $f(x)$  oppure l'esame del differenziale terzo ecc. Ancora più complicato è il caso in cui, pur esistendo il differenziale primo  $df$  non esista il differenziale secondo, poichè allora si richiederebbe l'esame di  $\Delta y$  al variare di  $\Delta x$  in guisa che  $x^0 + \Delta x$  descriva un intorno completo di  $x^0$ . Da tenere ancora presente le eventuali complicazioni nel caso in cui  $x^0$  sia punto di frontiera.

Sia adesso (in condizioni più generali)

$$y = f(x)$$

cioè un  $m$ -vettore  $y$  funzione di un  $n$ -vettore  $x$  (si tratta del sistema scritto in forma compatta di  $m$ -funzioni di  $n$  variabili

$$y_h = f_h(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Allora, in perfetta analogia, la differenziabilità di  $y = f(x)$  in  $x^0$  è definita mediante la rappresentazione

$$\Delta y = P^0 \Delta x + r_2(\Delta x)$$

dove l' $m$ -vettore  $r_2(\Delta x)$  è tale che

$$\|r_2\| / \|\Delta x\| \rightarrow 0 \text{ per } \Delta x \rightarrow 0, \quad P^0 \text{ è una } (m, n)\text{-matrice}$$

$$P^0 = (p_{kh}^0) \quad (h = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n)$$

dove necessariamente  $p_{hk}^0 = (\partial f_k / \partial x_h)_0$  e  $P^0 \Delta x$  sta ad indicare il trasformato di  $\Delta x$  con la trasformazione lineare  $P^0$ ; si dice  $dy = df = P^0 \Delta x$  differenziale primo di  $f(x)$  in  $x^0$  ecc.

Se  $P^0$  è la matrice a elementi tutti nulli risulta  $df = 0$  e, in questo caso,  $x^0$  è un punto a valore  $y^0$  stazionario.

Per il differenziale secondo (analogamente a quanto abbiamo veduto per il numero  $y$ ) entra in giuoco la rappresentazione

$$\Delta y = P^0 \Delta x + \frac{1}{2} Q^0(\Delta x, \Delta x) + r_3(\Delta x)$$

dove  $\|r_3\| / \|\Delta x\|^2 \rightarrow 0$  per  $\Delta x \rightarrow 0$ , mentre  $Q^0(x^1, x^2)$  è un operatore bilineare (cioè lineare in  $x^1$  e lineare in  $x^2$ ) che fa passare dalla coppia di due  $n$ -vettori  $x^1, x^2$  (nel caso specifico  $\Delta x, \Delta x$ ) a un  $m$ -vettore; questo operatore è costruito mediante la tabella di numeri a tre indici  $q_{khl}^0 = (\partial^2 f_k / \partial x_h \partial x_l)_0$  (le derivate parziali seconde finite delle componenti  $f_k$  di  $f$ ); in definitiva l' $m$ -vettore  $Q^0(\Delta x, \Delta x)$  ha come componenti i numeri  $d^2 y_k = Q_k^0(\Delta x, \Delta x)$  che sono i differenziali secondi delle  $y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) componenti di  $y$ .

Se  $y = f(x)$  possiede requisiti di smussatezza, sempre precisabili, e  $x^0$  non è a valore stazionario (cioè  $P^0$  non è la matrice nulla!) allora l'incremento  $\Delta y$  di  $y$  ha per parte preponderante (parte principale) il differenziale primo  $dy = P^0 \Delta x$  ottenuto mediante una trasformazione lineare dell'intorno di  $x^0$  nell'intorno di  $y^0$ , tanto più approssimata quanto più è piccolo  $\Delta x$ . Se  $x^0$  è a valore stazionario la parte principale (del 2° ordine rispetto a  $\|\Delta x\|$ ) viene assunta, in generale, dal differenziale secondo. Tutto ciò mostra la grande importanza delle trasformazioni lineari per descrivere localmente i fenomeni anche complessi, poichè il punto generico, salvo casi banali, non è a valore stazionario. Se  $x^0$  è a valore stazionario entra in giuoco la trasformazione quadratica che costituisce l'approssimazione ulteriore. Casi ancora più eccezionali si possono presentare, nei quali è indispensabile la considerazione dei differenziali di ordine ancora più elevato  $d^3y, d^4y$ , ecc.

Tutto ciò giustifica la tendenza a introdurre ipotesi semplificatrici adatte che conducano a un modello analitico abbastanza smussato: rimane sempre da non dimenticare la delimitazione del campo entro il quale la validità del modello è garantita.

Io debbo scusarmi se ho richiesto, a chi non abbia familiari certi concetti, troppa fatica per essere seguito; questa fatica è tuttavia illuminante, poichè ci orienta sull'uso che si fa dello stru-

mento matematico: in tale uso si possono delineare posizioni di partenza antitetiche: definizione generale e rappresentazione con mezzi assegnati; proprietà locale e proprietà in grande; proprietà in grande e proprietà globale su tutto il campo di esistenza; configurazione stazionaria oppure no; configurazione il cui punto immagine è interno oppure è di frontiera; algoritmo infinito e rappresentazione finita, ...; è nel superamento di queste antitesi mediante saldature concettuali convenienti che tale strumento può evadere dal punto di vista iniziale proprio e così divenire perfetto e completo per le applicazioni nei vari campi della Scienza.

I momenti storicamente cruciali del pensiero matematico sono quelli in cui si delineano chiaramente le fratture dell'antitesi e quelli in cui, con un superamento, tali antitesi si conciliano.

### Programmazione lineare.

Ci proponiamo adesso di aprire uno spiraglio sopra due argomenti tipicamente attuali: la « Programmazione lineare » e la « Teoria dei giochi » che sono tra loro connessi. La loro attualità, sia nello sviluppo concettuale che nelle applicazioni, è dovuta a una favorevole congiunzione fra l'evolversi dell'Economia matematica e l'avvento degli elaboratori elettronici.

La programmazione lineare si occupa di una ampia categoria di problemi concreti, in modo particolare di quelli rivolti a decidere se convenga oppure no eseguire una certa azione e, in caso affermativo, sceglierne la modalità più favorevole quando se ne presentano diverse analoghe possibili. Per esempio: la ripartizione della attività di produzione fra diversi tipi di un prodotto, la decisione sull'incremento delle scorte di magazzino, la localizzazione ottima dei magazzini di deposito tenendo conto delle comunicazioni, la distribuzione più favorevole nei diversi magazzini quando questi siano già impiantati, la distribuzione più favorevole nelle varie sedi degli incrementi degli affari quando rimangano fissate certe circostanze, la distribuzione ottima dei messaggi in una rete di comunicazioni, la distribuzione dei trasporti aerei o marittimi o ferroviari o combinati per una compagnia ecc.

La impostazione di questa categoria di problemi da parte delle aziende che vogliono risolverli traendo vantaggio dallo strumento matematico, con una impostazione razionale e precisa, è entrata nell'uso da poco più di dieci anni.

GEORGE B. DANTZIG nella sua recentissima ampia e documentata opera <sup>(1)</sup> dice: « Linear programming has been serving industrial users in several ways. First, it has provided a novel view of operations; second, it induced research in the mathematical analysis of the structure of industrial systems; and third, it has become an important tool for business and industrial management for improving the efficiency of their operations. Thus the application of linear programming to a business or industrial problem has required the mathematical formulation of the problem and an explicit statement of the desired objectives. In many instances such rigorous thinking about business problems has clarified aspects of management decision-making which previously had remained hidden in a haze of verbal arguments. »

Nei problemi della categoria accennata si presenta spesso una funzione lineare intera (funzione obiettivo)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

da rendere massima o minima con l'opportuna scelta della  $n$ -upla dei valori da attribuire alle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (variabili di azione):  $z$  può essere un profitto, una quantità prodotta oppure una spesa, una quantità dissipata ecc. La scelta della  $n$ -upla deve soddisfare a delle condizioni (vincoli) che sono espresse mediante equazioni o disequazioni lineari; per esempio

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = p$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \leq q$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0$$

(con notazione vettoriale si può scrivere:

$$z = c \cdot x, \quad a \cdot x = p, \quad b \cdot x \leq q, \quad x \geq 0).$$

Alla luce delle considerazioni sull'Analisi infinitesimale esposte precedentemente, questo problema si presenta con caratteri teorici di estrema semplicità: pensiamo per un momento al caso  $n = 2$

<sup>(1)</sup> G. B. DANTZIG, *Linear programming and extensions*, Princeton N. J., 1963. Vedi p. 28: i corsivi sono dell'autore.



con  $z = f(x, y) = ax + by + c$  funzione delle due variabili  $x$  e  $y$  (scriviamo  $x$  e  $y$  in luogo di  $x_1$  e  $x_2$ ); poichè  $ax + by + c = h$  è l'equazione di una retta che si sposta parallelamente a se stessa al variare di  $h$ , il sistema delle linee di livello è costituito da un fascio di rette parallele (vedi fig. 29). È chiaro intuitivamente, e si

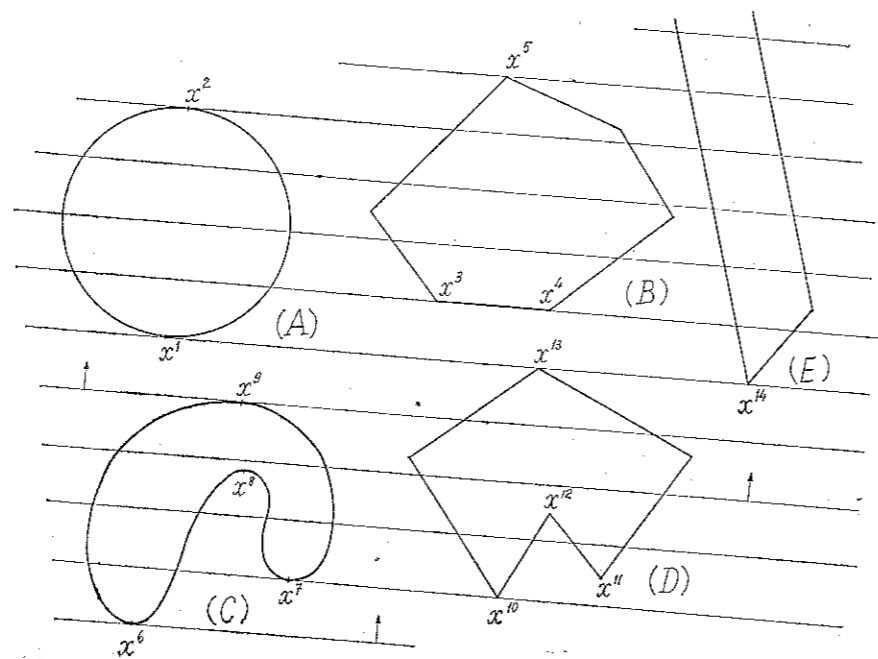


fig. 29

potrebbe dimostrare con semplicità, che una funzione lineare in un campo  $T$  del piano non può assumere il valore massimo all'interno di  $T$  a meno che non si riduca a una costante; lo stesso si dica per il valore minimo (in sostanza, se  $z$  non è costante, non si possono avere punti interni a  $T$  di valore stazionario!) Dunque, i punti estremanti, sempre esistenti se il campo  $T$  è limitato, debbono trovarsi sulla frontiera  $T^*$  di  $T$ . Nella figura 29, ritenendo che il livello di  $z$  sia costante lungo ciascuna retta del fascio di rette parallele ivi segnate e sia crescente nel senso indicato dalla freccia, si vede chiaramente che: in (A)  $x^1$  è punto di minimo e  $x^2$  punto di massimo (ambedue punti a valore stazionario per la  $x$  vincolata lungo la frontiera); in (B) i due vertici  $x^3$  e  $x^4$  sono punti di mi-

nimo e  $x^5$  è punto di massimo, inoltre ogni punto del lato  $x^3x^4$  è punto di minimo (il punto  $x^5$  non è punto a valore stazionario neppure per  $x$  vincolato lungo la frontiera); in (C) il punto  $x^8$  non è estremante nè interno nè di frontiera, ma è estremante (massimo) per  $x$  vincolato lungo la frontiera; in (E) il campo è illimitato e il punto  $x^{14}$  è di minimo mentre non esiste punto di massimo ecc.

Nei problemi tipici di programmazione lineare il campo  $T$  dei vincoli si riduce a una figura poligonale convessa limitata o illimitata (come per es. (B) ed (E)) e allora i punti estremanti sono certamente nei vertici oppure eccezionalmente lungo tutto un lato (vedi (B) in fig. 29).

Queste considerazioni si estendono al caso di tre variabili (avremo il fascio dei piani paralleli di livello e la figura poliedrale convessa  $T$  dei vincoli) e  $n$  variabili (avremo il fascio degli iperpiani, cioè varietà lineari a  $n - 1$  dimensioni, paralleli di livello e la figura poliedrale convessa  $T$  dei vincoli). In ogni caso la risoluzione del problema è ricondotta alla determinazione della funzione obiettivo  $z$  nei vertici e nella scelta del vertice o dei vertici che assegnano il massimo o il minimo di  $z$ .

Nella condotta tecnica della risoluzione si possono seguire procedimenti diversi, fra loro concettualmente analoghi, in ciascuno dei quali l'immagine geometrica è chiarificatrice: tuttavia il procedimento, in ogni caso, ha il carattere analitico schematico che lo rende adatto a formulare il « programma » per l'elaboratore. Qualora lo si ritenga utile, a una disequazione lineare  $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \leq q$  si può sostituire il sistema

$$b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + x_{n+1} = q, \quad x_{n+1} \geq 0$$

costituita da un'equazione lineare con la incognita  $x_{n+1}$  ausiliaria in più e con la disequazione  $x_{n+1} \geq 0$  che impegna quella sola incognita. Si comprende bene che questo artificio, eventualmente ripetuto più volte, conduce ai vincoli espressi mediante un sistema di  $m$  equazioni lineari in  $N$  incognite  $x_1, x_2, \dots, x_N$  alcune delle quali sono dette incognite di base ed entrano una per ciascuna nelle  $m$  equazioni e inoltre devono verificare  $x_h \geq 0$ . Un sistema così fatto si dice in « forma canonica ». Si può anche considerare il problema in « forma standard » mediante le condizioni seguenti che scriviamo, per raggiungere maggiore concisione, in forma vettoriale:

$$z = c \cdot x, \quad Ax = b, \quad x \geq 0,$$

dove  $A$  è una  $(m, n)$ -matrice,  $b$  è un  $m$ -vettore e  $c$  è un  $n$ -vettore ambedue assegnati. Per esempio, nel caso  $m = 1, n = 3$  il sistema  $Ax = b$  è costituito da una sola equazione  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$ , che definisce un piano del quale si deve considerare la regione triangolare (eventualmente illimitata oppure vuota o ridotta a un punto) contenuta nel «quadrante»  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ : i lati del triangolo sono sui piani coordinati. Se la regione triangolare esiste ed è limitata, il valore minimo di  $z$  viene assunto in uno dei vertici.

In generale la ricerca dell'estremale può essere organizzata lungo un procedimento (algoritmo del semplice o metodo del semplice) che si presta, come abbiamo detto, all'uso degli elaboratori elettronici; su tale procedimento sorvoliamo e diremo soltanto che mentre l'ampliamento del numero delle incognite con l'introduzione di quelle ausiliarie renderebbe impraticabile la risoluzione quando venissero usati mezzi tradizionali se  $m$  e  $n$  risultassero troppo grandi, detto ampliamento consente di «programmare» per l'elaboratore gli algoritmi e i metodi suddetti. Partendo da una soluzione «canonica» accettabile (ma non ottimale), l'elaboratore, mediante successivi passi, va alla ricerca della soluzione ottimale richiesta.

Riflettiamo un momento su quanto è stato esposto poco fa su certi metodi generali dell'Analisi infinitesimale: nel problema tipico della programmazione lineare non si presenta affatto la ricerca dei punti a valore stazionario e non si presenta affatto il metodo classico dei moltiplicatori di LAGRANGE.

Accenniamo di passaggio alle estensioni di questo problema. Sono stati studiati: *a*) problemi nei quali i coefficienti sono interi e le soluzioni  $x$  si ricercano a coordinate intere (problemi che involgono l'Analisi combinatoria, l'Analisi diofantea ecc.); *b*) problemi nei quali i vincoli vengono espressi, anziché mediante disequazioni lineari, da disequazioni anche di grado superiore che conducono a campi  $T$  convessi (eventualmente con la condizione ulteriore che le soluzioni  $x$  abbiano coordinate intere); *c*) problemi in cui i coefficienti dati  $a_{hk}, c_h, b_k$  siano affetti da incertezza di carattere probabilistico definita mediante funzioni distribuzione assegnate. Tenendo presenti le considerazioni generali del capitolo precedente si intravede in quale modo ivi si inquadrino queste diverse forme di estensione del problema.

### Teoria dei giochi. Comportamento economico.

Uno dei più grandi matematici contemporanei, JOHN von NEUMANN, nel 1928 pose su basi assiomatiche una teoria dei giochi<sup>(12)</sup>. Egli proveniva dalla scuola di HILBERT che, in uno dei suoi molteplici orientamenti, si era rivolta all'assiomatizzazione della Matematica. Ricerche verso la teoria dei giochi erano state svolte in precedenza da E. BOREL (1921).

Le idee espresse da J. von NEUMANN non ebbero particolari sviluppi finché lo stesso von NEUMANN e l'economista O. MORGENSTERN della scuola di Vienna non richiamarono l'attenzione su quell'inquadrimento e su quelle idee, segnalandone le possibili applicazioni all'Economia matematica: nacque così l'opera fondamentale, oggi classica, di questi due autori<sup>(13)</sup>; in essa si riprende la teoria presentata quindici anni prima dal von NEUMANN, dandole un assetto più evoluto e completo, mediante legami con la teoria degli insiemi, la topologia e la teoria delle probabilità, e facendone una applicazione concettuale molto interessante intesa a giustificare e a formulare matematicamente il comportamento di un individuo o di un ente inserito in una competizione economica. Si tratta di concetti così generali che possono guidare teoricamente le operazioni anche di fronte a certe situazioni schematizzate di ostilità bellica, segnalando il comportamento tattico o strategico più favorevole.

Dopo la comparsa di quest'opera, la letteratura sull'argomento si è svolta fiorentissima e i legami della Teoria dei giochi con le teorie ausiliarie si sono fatti via via più profondi: l'orizzonte dei problemi si è ampliato sempre più e nelle direzioni più inattese. Noi tenteremo qui di illustrare un concetto fondamentale di questa teoria nella sua forma schematica e primordiale.

Consideriamo una matrice  $A \equiv (a_{hk})$  di  $m$  righe e  $n$  colonne

$$(R) \begin{matrix} & \begin{matrix} (C) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \end{matrix}$$

<sup>(12)</sup> J. von NEUMANN, *Zur Theorie der Gesellschaftspiele*. Math. Ann. 100, 295-320 (1928); *Collected Works*, VI (1963), 1-26.

<sup>(13)</sup> J. von NEUMANN and O. MORGENSTERN, *Theory of games and economic behavior*, Princeton N. J. 1944.



ad elementi  $a_{hk}$  reali, positivi nulli o negativi: questa matrice (tabella di numeri) costituisce il regolamento del gioco, nel senso che i suoi elementi (numeri reali) sono le quote che il giocatore  $(C)$  (giocatore-colonna o giocatore del minimo) deve pagare ad  $(R)$  (giocatore-riga o giocatore del massimo) nel gioco elementare organizzato nel modo seguente:  $(R)$  sceglie una riga (per esempio la  $k$ -esima) e simultaneamente  $(C)$  sceglie una colonna (per esempio la  $h$ -esima); simultaneamente significa che mentre un giocatore sceglie non conosce la scelta dell'altro. Eseguita la scelta,  $(C)$  paga ad  $(R)$  l'ammontare di  $a_{hk}$  lire (se  $a_{hk}$  è negativo allora  $(C)$  riscuote da  $(R)$  l'ammontare di  $-a_{hk}$  lire). Questa scelta è una mossa del gioco: il regolamento (la matrice) potrebbe anche variare per le mosse successive. Consideriamo come esempio la ben nota « morra cinese » basata sulla scelta di pietra ( $p$ ), forbici ( $f$ ), carta ( $c$ ) e, considerata la quota che il giocatore vincente riscuote dall'altro, questo gioco elementare è regolato costantemente dalla matrice

$$(R) \begin{matrix} & \begin{matrix} (C) \\ p & f & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} p \\ f \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

come ci si persuade con un momento di riflessione.

Consideriamo come esempi le seguenti matrici:

$$(R) \begin{matrix} & \begin{matrix} (C) \\ (a) & (b) & (c) & (d) & (e) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 12 & 2 & -3 \\ 6 & 5 & 7 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 7 \\ -2 & 8 & 0 & -9 \\ 1 & 12 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Sia  $(a)$  la matrice che regola i pagamenti di  $(C)$  ad  $(R)$  e immaginiamo che ogni giocatore giochi con prudenza; allora  $(C)$  (che sarebbe portato a scegliere la prima colonna per pagare  $-7$ , cioè per riscuotere  $7$ ) deve tenere conto del pericolo che  $(R)$  scelga la prima riga per condurlo a pagare  $12$  e quindi, per essere sicuro del minimo danno, sceglierà la seconda colonna che lo condurrà a

perdere al più  $5$ ; in sostanza  $(C)$  sceglie la colonna che contiene il minimo fra i massimi delle colonne; per analoga ragione  $(R)$  sceglierà la seconda riga che contiene il massimo fra i minimi delle righe: la mossa del gioco conduce all'elemento  $a_{22} = 5$ .

In questa matrice  $(a)$  esiste un elemento che è « elemento di equilibrio » o « elemento di sella », perchè esso è, nello stesso tempo, massimo dei minimi delle righe e minimo dei massimi delle colonne. In generale sia  $a_{\alpha\beta}$  un elemento con questa proprietà, allora è

$$a_{\alpha\beta} = \max_k \min_h a_{hk} = \min_k \max_h a_{hk}.$$

Ogni elemento di equilibrio è caratterizzato dalla proprietà di essere simultaneamente il minimo lungo la propria riga e il massimo lungo la propria colonna: il minimo e il massimo sono intesi in senso debole perchè possono essere presenti, lungo la riga e lungo la colonna, elementi con eguale valore. Questo elemento di equilibrio è il « valore del gioco »: denotiamolo con  $v$ ; per la matrice  $(a)$  risulta  $v = 5$ . Il giocatore  $(C)$  è destinato a pagare al più  $5$  per ogni mossa.

In una stessa matrice, gli elementi di equilibrio possono essere anche più di uno, ma sono necessariamente fra loro uguali: per esempio, nella matrice  $(b)$  si hanno i quattro elementi di equilibrio  $a_{11} = a_{13} = a_{31} = a_{33} = 1$  e la mossa  $(\alpha, \beta)$  dei due giocatori è qualunque delle quattro  $(1, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(3, 3)$ . Ma non sempre la matrice del regolamento presenta un elemento di equilibrio; per esempio esso manca nelle matrici  $(c)$ ,  $(e)$ . Quando esiste un elemento di equilibrio il gioco si dice « strettamente determinato »; esso è « equo » se e soltanto se il suo valore  $v = 0$ .

È facile vedere che in ogni matrice si ha

$$v_1 = \max_h \min_k a_{hk} \leq \min_k \max_h a_{hk} = v_2;$$

quando e solo quando  $v_1 < v_2$  manca l'elemento  $a_{\alpha\beta}$  di equilibrio; in caso contrario è  $v_1 = v_2 = v = a_{\alpha\beta}$ . Per esempio nelle matrici della morra cinese e in quelle  $(c)$ ,  $(d)$ ,  $(e)$  è rispettivamente:

$$v_1 = -1, v_2 = +1; \quad v_1 = -1, v_2 = +1; \quad v_1 = v_2 = 1; \quad v_1 = 0, v_2 = 1.$$

Nel caso in cui sia  $v_1 < v_2$ , cioè nel caso in cui manchi l'elemento di equilibrio nella matrice  $(a_{hk})$  del regolamento, la risposta al quesito di comportamento dei giocatori non è così semplice come

nel caso strettamente determinato. Per rispondere occorre immaginare che venga eseguita una sequenza estesa di mosse, tutte regolate dalla stessa matrice; si tratta di scegliere detta sequenza con una legge aleatoria opportuna.

Siano

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m), \quad (p_1 \geq 0, \dots, p_m \geq 0; p_1 + \dots + p_m = 1)$$

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (q_1 \geq 0, \dots, q_n \geq 0; q_1 + \dots + q_n = 1)$$

due « vettori-probabilità », il primo  $p$  attinente alla scelta delle righe, attribuito al giocatore ( $R$ )<sup>(14)</sup>, e il secondo  $q$  attinente alla scelta delle colonne, attribuito al giocatore ( $C$ ): per esempio,  $p_2$  è la probabilità che ( $R$ ) scelga la seconda riga,  $q_3$  è la probabilità che ( $C$ ) scelga la terza colonna. Ogni vettore  $p$  si dice « strategia mista per le righe », ogni vettore  $q$  « strategia mista per le colonne »; la coppia  $(p, q)$  individua la legge aleatoria che governa la sequenza delle mosse.

La legge delle probabilità composte ci dice che l'elemento  $a_{hk}$  verrà scelto con la probabilità  $p_h q_k$  e quindi il contributo nell'aspettazione matematica dovuto alla scelta simultanea della riga  $h$  e della colonna  $k$  è  $a_{hk} p_h q_k$ ; pertanto il risultato globale della mossa eseguita con le due strategie miste,  $p$  da parte di ( $R$ ) e  $q$  da parte di ( $C$ ), risulta la somma

$$f = \sum_{h,k} a_{hk} p_h q_k = A(p, q).$$

Questa è una forma bilineare nelle due serie di variabili ( $p_h$ ) e ( $q_k$ ), della quale il quadro dei coefficienti è la matrice  $A$  regolamento del gioco: la forma  $f$  assume un valore ben determinato per ogni coppia  $(p, q)$  di strategie. Lo scopo di ( $R$ ) è di rendere massimo il valore di  $f$  di fronte alla simultanea azione di ( $C$ ); lo scopo di ( $C$ ), al contrario, è di renderlo minimo di fronte all'azione di ( $R$ ).

Ebbene, si dimostra che: « Comunque sia scelta la matrice  $A = (a_{hk})$  del regolamento, esiste uno e un solo numero  $v$  (detto « valore del gioco ») e almeno una coppia  $p^0, q^0$  di strategie miste

(14) Per esempio se  $m = 3$  e  $p = (1/2, 3/10, 1/5) = (5/10, 3/10, 2/10)$ , si consideri un'urna contenente dieci palline di cui cinque contrassegnate col numero 1, tre col numero 2 e le rimanenti due col numero 3. Il giocatore ( $R$ ) estrae una pallina dall'urna e come mossa sceglie la riga corrispondente al contrassegno.

(dette « strategie miste ottimali ») per le quali è

$$v = \sum a_{hk} p_h^0 q_k^0 = A(p^0, q^0),$$

e inoltre per ogni  $p$  e per ogni  $q$  risulta verificata la catena di disuguaglianze (attenuate)

$$\sum a_{hk} p_h q_k \leq v \leq \sum a_{hk} p_h^0 q_k^0.$$

Questo significa che il valore  $v$  è il più favorevole per ciascuno dei giocatori ( $R$ ) e ( $C$ ), nell'ipotesi che ambedue tendano a raggiungere rispettivamente il massimo e il minimo di  $f$  come pagamento da ( $C$ ) ad ( $R$ ), essendo ciascuno di loro a conoscenza di questa tendenza dell'altro. Il gioco sarà equo se e soltanto se  $v = 0$ .

Esistono giochi, cioè matrici  $A$ , nei quali la strategia ottimale  $p^0$  non è unica; se  $p^0$  e  $p^1$  sono ambedue ottimali ogni  $p = \alpha p^0 + \beta p^1$  ( $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ ) è ottimale; e quindi le strategie ottimali riempiono entro il campo ( $p_1 \geq 0, \dots, p_m \geq 0, p_1 + \dots + p_m = 1$ ) una varietà lineare. Lo stesso dicasi per la  $q^0$ .

In ogni gioco strettamente determinato, la mossa che conduce a un elemento  $a_{\alpha\beta}$  di equilibrio risponde alla strategia ottimale  $p^0$  nella quale  $p_\alpha = 1$  e  $p_h = 0$  per ogni  $h \neq \alpha$ , e  $q^0$  nella quale  $q_\beta = 1$  e  $q_k = 0$  per ogni  $k \neq \beta$ ; ogni strategia di questo tipo si dice « strategia pura »; in questo caso l'alea del fenomeno cessa di sussistere poichè  $p_\alpha = 1$  risponde alla scelta della riga  $\alpha$  con certezza e lo stesso si dica per la colonna  $\beta$ .

La proposizione ora enuncata è il celebre teorema del « Minimax » dimostrato da J. von NEUMANN: esso si collega con la topologia e la teoria dei corpi convessi. La scoperta di questo teorema ha consentito lo sviluppo della teoria dei giochi: infatti esso consente di attribuire un valore  $v$  a qualunque gioco, anche a quelli nei quali  $v_1 < v_2$ ; e detto valore  $v$ , con  $v_1 \leq v \leq v_2$ , si raggiunge con un passaggio concettuale interessante e inatteso. Dal discontinuo (la tabella dei numeri) siamo condotti nell'Analisi del continuo introducendo la coppia degli spazi delle strategie miste  $p$  e  $q$ . Tale evasione dal discontinuo, attraverso la teoria delle probabilità, conduce a una immagine geometrica costituita di figure in spazi a due, tre o più dimensioni, e il valore del gioco viene raggiunto con piena giustificazione secondo lo stesso spirito dei giochi strettamente determinati. Si rifletta un momento sulla seguente catena di



disuguaglianze (attenuate) e uguaglianze:

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_h \min_k a_{hk} \leq \max_p \min_q A(p, q) = \\ &= \max_p A(p, q^0) = A(p^0, q^0) = v = \\ &= \max_q A(p^0, q) = \min_q \max_p A(p, q) \leq \\ &\leq \min_k \max_h a_{hk} = v_2; \end{aligned}$$

la sua parte centrale si chiude nel continuo in una uguaglianza, anche nel caso in cui sia  $v_1 < v_2$  e si chiude sul valore  $v$ , proprio in perfetta coerenza con l'atteggiamento dei due giocatori. Questo dice il teorema del Minimax.

La determinazione delle strategie miste ottimali, sebbene concettualmente semplice, può presentare difficoltà gravi nella pratica tradizionale: risultano di buon ausilio i moderni elaboratori elettronici.

Abbiamo parlato del gioco di due persone: il gioco di tre o più persone si presenta in modo analogo. La teoria si sviluppa poi introducendo i concetti del « bluff », quelli inerenti alle coalizioni fra giocatori, ai giochi semplici e alla loro eventuale composizione ecc. Anche la programmazione lineare di cui abbiamo già parlato è in stretta relazione con la teoria dei giochi.

Con quanto siamo venuti esponendo, abbiamo presentato il fenomeno elementare schematico nel campo di quei fenomeni nei quali intervengono due o più persone operanti ciascuna con l'intento di raggiungere un proprio obiettivo: questo schema concettuale è risultato estremamente fecondo (per analogia si potrebbe pensare al fenomeno schematico elementare immaginato dal NEWTON per la gravitazione universale) e si intravede quanto grande sia l'interesse di una teoria del comportamento economico che, fra le sue basi, possieda uno schema come quello qui presentato. In una tale teoria, la posizione esatta dei problemi di economia e la susseguente soluzione possono essere raggiunte soltanto con l'aiuto di metodi matematici che divergono considerevolmente dalle tecniche

adottate dagli studiosi di economia matematica, passati e contemporanei (\*).

Leggiamo un classico: HANS MAYER. In un suo articolo (\*\*), destinato alle ricerche sulla trattazione matematica del problema dei prezzi egli inizia col dire:

« Da oltre una generazione stanno l'uno di fronte all'altro « due sistemi della economia pura, precedenti entrambi, almeno dal « punto di vista programmatico, dai medesimi fondamenti generali: « relazioni determinabili in base all'esperienza — e non semplicé- « mente postulate, come nella più antica teoria —; stabiliti en- « trambi in vista di un medesimo, determinato scopo euristico: la « comprensione della economia sociale sotto forma di economia dello « scambio, come *entità unitaria* mediante la presentazione e, possi- « bilmente, la formulazione esatta delle leggi secondo le quali i « singoli elementi ed avvenimenti sono connessi fra loro in un « tutto, con relazioni determinate; il riconoscimento di una interdipendenza generale degli eventi economici, nel senso che nulla « sussiste isolato per se stesso, ma tutti gli elementi si trovano in « determinati rapporti di reciproca corrispondenza. Sembrerebbe le- « cito concludere che in conseguenza di questa analogia delle basi « di partenza e degli scopi scientifici generali, i due sistemi o do- « vrebbero confluire l'uno nell'altro e confondersi in un *unico* si- « stema ...; oppure che — ove essi posseggano un grado diverso di « perfezione tecnica — quello tecnicamente più completo dovrebbe « in definitiva soppiantare l'altro ... »

« Nell'economia pura invece, i due sistemi stanno da mezzo se- « colo l'uno di fronte all'altro; da un lato *quello che espone la teo- « ria dell'equilibrio con mezzi matematici* (Scuola di Losanna), dall'al- « tro *quello che spiega il processo economico secondo una teoria gene- « tico-causale* (Scuola austriaca), [la Scuola di Cambridge ... tende a « soluzioni in vista di *equilibri parziali* ... ]; essi si armonizzano in « molti punti, ma almeno in altrettanti differiscono e rivaleggiano, « ciascuno ritenendo, naturalmente, di essere quello capace di offrire « le maggiori possibilità di utilizzazione ... »

Dopo avere accennato alle differenze sostanziali e alle posizioni antitetiche dei due orientamenti, lo stesso autore prosegue: « In

(\*) Vedi J. von NEUMANN-O. MORGENSTERN, loc. cit. p. 1.

(\*\*) HANS MAYER, Il concetto di equilibrio nella teoria economica, in *Nuova collana di economisti*, vol. IV, *Economia pura*, Torino 1937, pp. 645-800; vedi pp. 649-651.

« tale stato di cose, non può non apparire privo di significato che « di quando in quando si invochi, senza dubbio con buone intenzioni, una *sintesi* dei due sistemi... » ed affronta l'indagine accurata sulla consistenza e profondità di quelle divergenze.

Ebbene, ci sembra che nell'esperienza schematica elementare della Teoria dei giochi si ravvisi lo strumento adatto per introdurre, in forma matematicamente precisa, nuovi elementi volti a spiegare la formazione genetico-causale dell'equilibrio. Ci sembra ancora che questa concezione, una volta posta in forma matematica, possa utilmente collaborare ed entrare in simbiosi con quella tradizionale del sistema economico presentata dalla Scuola di Losanna e da quella inglese (che si valgono sistematicamente dell'Analisi infinitesimale); collaborare per avvicinare la visione di sintesi sull'evoluzione di un sistema economico nella quale vengano a fondersi l'idea dell'equilibrio economico generale con quella della sua formazione genetico-causale.

Ad avvicinare questa sintesi dovrebbero così concorrere i diversi orientamenti: quello dell'Analisi infinitesimale e dell'Analisi funzionale, particolarmente adatto per la componente spontanea dell'evoluzione locale e in grande, nel tempo e nello spazio; quello del comportamento, conforme alla Teoria dei giochi, che tien conto delle decisioni che possono allontanare da tale spontaneità; e infine quello che sostituisce sistematicamente la varietà lineare nell'intorno di una configurazione del sistema e che rende possibile la pratica descrizione numerica servendosi degli elaboratori.

I problemi generali significativi dell'Economia sono di una estrema complicazione. Se l'utilizzazione dei concetti della Teoria dei giochi (strategie miste variabili col tempo, con informazione aleatoria ecc.) affiancati alle teorie matematiche classiche, sospingesse verso la chiarezza e consentisse una migliore descrizione teorica del problema generale, ancora una volta il pensiero matematico sarebbe conciliatore della dialettica interna di un ramo della Scienza.

Se ci volgiamo a considerare la Teoria dei giochi costruita dal von NEUMANN e la sua formulazione assiomatica, e, più indietro, la scuola matematica di HILBERT e il Circolo di Vienna, e, ancora oltre, lo sforzo più che secolare compiuto da tutta la Scienza matematica nella ricerca sulle trame di assiomi che costituiscono l'ossatura dei suoi vari settori, restiamo ammirati per la fecondità di tali sforzi che hanno condotto la Matematica ad evolversi in svariate forme, rendendola uno strumento adatto per inquadrare e risolvere i problemi che qua e là affiorano nelle attività del mondo d'oggi.

### Le imprese spaziali, sintesi di Scienza e Tecnica.

Io rimango nel tema proposto se concludo il mio discorso col richiamare alla Loro mente le manifestazioni che documentano lo stadio di estrema perfezione della Tecnica contemporanea, indirizzata e sostenuta dalla Scienza in continuo avanzamento. Alludo alle imprese organizzate dall'Unione Sovietica e dagli Stati Uniti d'America in questi ultimi anni: il lancio e la guida successiva di veicoli spaziali orbitali o interplanetari, abitati oppure no. Io sono del tutto incompetente in questa materia, tuttavia posso esprimere Loro le impressioni da me ricevute una volta che ascoltai una persona competente che parlava su questo argomento: impressioni di modesto ascoltatore matematico.

Nel febbraio scorso, presso il Seminario matematico e fisico di Milano, il giovane insigne collega GIUSEPPE COLOMBO ci parlò di « Tecnologia e Scienza dello spazio nella esplorazione di Venere »<sup>(17)</sup>. Egli illustrò, nella sua conferenza, alcuni dei numerosi problemi che furono affrontati dall'organizzazione americana per preparare, lanciare, guidare, ascoltare, interpretare questa esplorazione, alla quale egli ha collaborato. Si tratta del lancio del Mariner II: un veicolo strumentale automatico non abitato e destinato a esplorare lo spazio.

Estremamente suggestiva fu la presentazione delle fasi successive di indirizzo e di comando del veicolo, delicato e complesso, che doveva transitare a poca distanza da Venere (alcuni raggi del pianeta) e percorrere la sua traiettoria in guisa da « vederne », a distanza così ravvicinata, sia l'emisfero notte che l'emisfero giorno, con la condizione ulteriore di rimanere sempre in vista della Terra prima, durante e dopo il transito.

Qui conviene riportare alcuni brani del discorso di G. COLOMBO. Dopo avere accennato ai fattori che influivano sulla difficoltà dell'impresa, descritto sommariamente il veicolo, illustrato le delicate operazioni di lancio e di guida per raggiungere gli obiettivi prefissati, descritte le manovre del veicolo nella prima parte del viaggio, egli così prosegue:

« L'evento successivo avviene soltanto dopo 7 giorni di volo « (a 2 milioni di chilometri circa dalla Terra) e consiste nella acqui-

<sup>(17)</sup> Vedi G. COLOMBO, « Tecnologia e Scienza... », Rendiconti del Seminario mat. e fis. di Milano, 33 (1963), pp. 114-127.



« sizione della Terra da parte del sensore di Terra. L'operazione « non è fatta prima perchè il sensore non funzionerebbe propriamente a distanza troppo ravvicinata perchè troppo sensibile. Il « Mariner ora gira intorno al suo asse di rollio orientato sul Sole « ed incomincia col suo sensore di Terra, allineato con l'antenna « di alto guadagno, a cercare la Terra. Quando il sensore vede la « Terra informa i jets i quali fermano il moto di rollio e tengono « d'ora in poi anche la Terra centrata nel sensore e fissano così la « posizione di un ulteriore asse solidale col Mariner ». E, più oltre, dice che da un certo momento in poi, secondo i programmi « non « è più possibile agire sul Mariner... Si è in grado di prevedere « con accuratezza, ma ormai non più di influenzare, le modalità di « incontro col pianeta ». Più oltre ancora egli dice « L'antenna parabolica... inizia 10 ore prima dell'incontro [col pianeta Venere] « un moto pendolare con ampiezza di 120 gradi su un piano normale al piano Sole-Terra-Mariner, con una velocità di un grado « al secondo. Questo moto pendolare combinato col moto del Mariner « sulla sua orbita, porta, prima o dopo, l'antenna a vedere Venere. « In questo istante la velocità del moto pendolare è ridotta a un « decimo di grado al secondo, inoltre uno speciale sistema di « controllo limita l'ampiezza del moto stesso in modo da confinare « l'attenzione dell'antenna nel solo disco di Venere. Il pianeta è « visto dal Mariner sotto un angolo da 15 a 20 gradi... Dopo 30 « minuti circa l'antenna perde definitivamente il pianeta ed incomincia la trasmissione dei dati raccolti e registrati che prende « 56 ore, cioè oltre due giorni. In questo periodo, e possibilmente « oltre, è importante che l'antenna di alto guadagno continui ad « essere puntata sulla Terra: l'intelligenza del Mariner non è « sufficiente a riconoscere e riacquisire la Terra, ormai una stella « brillante nel cielo, se per essere passato troppo vicino a Venere, « questa gli occultasse anche temporaneamente la vista del nostro « pianeta.

« La trasmissione dei dati di osservazione avviene ora da una « antenna emittente, che lavora con 3 Watts di potenza, a 60 milioni di chilometri. La tecnica di codificazione, di trasmissione, « della separazione del segnale dal rumore e della interpretazione « dei segnali è di una raffinatezza estrema... ».

Ho voluto riportare questi brani di G. COLOMBO che parla di una manifestazione tipica del mondo di oggi: ciò che egli ci dice sembra un sogno. Lo strumento delicatissimo è lanciato nello spazio, orientato verso il Sole per ricavare l'energia, col sensore rivolto verso

la Terra che appare stella luminosa nel firmamento; lo strumento è memore di suggerimenti di guida a lui pervenuti, discreti e delicati, ed è come un figlio che, staccatosi dalla madre, ormai lontana, non può ricevere più sostegno e indirizzo alcuno e non deve perderla di vista per poterle lanciare il suo messaggio.

Sembra un prodigio: questo strumento inizia, a tempo giusto, la ricerca del suo obiettivo, il pianeta Venere, che fra poco gli apparirà grande: quasi come appare grande, a chi lo guardi dal basso, il tamburo della cupola di una cattedrale; una ricerca sistematica, controllata, cauta che si rende ancor più calma e attenta dall'istante in cui esso scorge il pianeta.

Pochi minuti: lunghe, accurate e difficili la preparazione e la esecuzione dell'impresa; lunga, accurata e difficile l'interpretazione successiva del messaggio. Ma quale sintesi in quei pochi minuti, oggetto di trepida ansiosa attesa sulla Terra!

L'ascoltatore sente raccogliersi, come in una sintesi operante, il pensiero matematico che sorse nella lontana storia: calmo nella prospettiva dei millenni, mosso e deciso a partire dagli ultimi tre secoli, tumultuoso negli ultimi cento anni, esplosivo nell'epoca contemporanea. Questo pensiero, sempre consapevole, sempre rivolto verso l'astrazione con una intensità dosata dalla propria epoca, si è evoluto lungo direttrici diverse, fra loro connesse a costituire una trama potente ed efficace.

Affiorano alla mente le figure dei grandi che costruirono la Geometria e l'Algebra, la Geometria analitica e l'Analisi infinitesimale, che diedero le leggi della gravitazione universale, che costruirono la Meccanica dei fluidi, la Termodinamica, l'Elettromagnetismo, la Statistica, la Fisica dei quanti, la Relatività... tutta la Matematica e tutta la Fisica moderna fino alla Magnetofluidodinamica, alle teorie dell'informazione, dei servomeccanismi, degli elaboratori elettronici...; tutto il pensiero matematico, come un *humus*, ad alimentare questa impresa, 350 anni dopo il giorno memorabile in cui GALILEO scoprì le fasi di Venere.

Quale sintesi! L'apparecchio, volto verso la Terra, stella lontana, forse falcata, lancia il messaggio all'*homo sapiens*, artefice di questa impresa e testimone, con questa, di una Sapienza suprema.

## INDICE

Introduzione . . . . .	pag.	1
Analisi infinitesimale . . . . .	»	2
Analisi dei fenomeni aleatori . . . . .	»	6
Analisi armonica . . . . .	»	10
I gruppi, la covarianza, le leggi della natura . . . . .	»	19
I grafi . . . . .	»	36
Ergodicità . . . . .	»	39
Ancora sull'Analisi infinitesimale . . . . .	»	46
Programmazione lineare . . . . .	»	58
Teoria dei giochi. Comportamento economico . . . . .	»	63
Le imprese spaziali, sintesi di Scienza e Tecnica . . . . .	»	71

Tipografia «Oderisi» Editrice - Gubbio 1964